HAL
open science

# Thermoplastiques renforcés en fibres de verre courtes : Comportement cyclique, fatigue et durée de vie

Antoine Launay

## To cite this version:

Antoine Launay. Thermoplastiques renforcés en fibres de verre courtes : Comportement cyclique, fatigue et durée de vie. Mécanique des solides [physics.class-ph]. Ecole Polytechnique (EDX), 2011. Français. NNT : . tel-01711106

**HAL Id: tel-01711106**

**https://hal.science/tel-01711106**

Submitted on 16 Feb 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Thermoplastiques renforcés en fibres de verre courtes : Comportement cyclique, fatigue et durée de vie

## Thèse

pour obtenir le titre de

## Docteur de l'École Polytechnique

Spécialité Mécanique

présentée par

**Antoine LAUNAY**

Soutenue le 12 décembre 2011, devant le jury composé de :

| | | |
|---|---|---|
| M. Jean-Louis CHABOCHE | ONERA, Châtillon | Président |
| M. Lucien LAIARINANDRASANA | CdM, Mines Paris-Tech | Rapporteur |
| M. Yves NADOT | Institut P', ENSMA | Rapporteur |
| M. Andrea BERNASCONI | Politecnico di Milano | Examinateur |
| M. Sylvain CALLOCH | LBMS, ENSTA Bretagne | Examinateur |
| Mme Ida RAOULT | PSA Peugeot Citroën, Vélizy | Encadrant industriel |
| M. Yann MARCO | LBMS, ENSTA Bretagne | Co-Directeur de thèse |
| M. Habibou MAITOURNAM | LMS, École Polytechnique | Directeur de thèse |

*À mes parents*

# Table des matières

**Remerciements** **vii**

**Notations** **ix**

**Introduction** **1**

**I Comportement** **7**

**1 Étude bibliographique** **9**
1.1 Les matériaux polymères . . . . . 10
1.2 Mécanismes physiques de déformation des thermoplastiques semi-cristallins . . . . . 15
1.3 Modélisation du comportement des thermoplastiques renforcés . . . . . 23

**2 Analyse de sollicitations** **43**
2.1 Modèle thermique . . . . . 43
2.2 Modèle thermo-hygrométrique . . . . . 49

**3 Modélisation du comportement cyclique** **61**
3.1 Analyse mécanique . . . . . 62
3.2 Équations constitutives . . . . . 70
3.3 Sources de dissipation et auto-échauffement . . . . . 82
3.4 Discussion . . . . . 86

**4 Influence des conditions environnementales sur le comportement mécanique** **91**
4.1 Identification et validation thermo-hygrométrique du modèle . . . . . 91
4.2 Influence de l'humidité sur la température de transition vitreuse . . . . . 97
4.3 Équivalence température-humidité . . . . . 100
4.4 Dépendance des paramètres matériaux à l'environnement . . . . . 102

**5 Distribution d'orientation des fibres et comportement** **105**
5.1 Distribution et tenseurs d'orientation . . . . . 106
5.2 Influence de la microstructure sur les propriétés élastiques . . . . . 111
5.3 Influence de la microstructure sur les propriétés viscoplastiques . . . . . 115
5.4 Validation de la prise en compte de la microstructure sur la réponse mécanique . . . . 119

**6 Validation sur structures** **125**
6.1 Principe de la chaîne de calcul numérique . . . . . 125
6.2 Éprouvettes de fatigue . . . . . 128
6.3 Répartiteur d'air à l'admission . . . . . 134

**II Tenue en fatigue** **141**

**7 Étude bibliographique** **143**
7.1 Introduction au phénomène de fatigue . . . . . 144
7.2 Mécanismes d'endommagement des thermoplastiques renforcés en fibres courtes . . 152
7.3 Paramètres influents sur la tenue en fatigue . . . . . 159
7.4 Critères proposés dans la littérature pour les thermoplastiques chargés . . . . . 164

**8 Proposition d'un critère de fatigue multiaxiale** **169**
8.1 Analyse d'essais de la littérature . . . . . 169
8.2 Application des critères classiques . . . . . 173
8.3 Discussion : vers un critère énergétique . . . . . 182

**9 Critère de fatigue énergétique** **187**
9.1 Identification du critère . . . . . 188
9.2 Application et validation sur structures . . . . . 197
9.3 Discussion autour du critère énergétique . . . . . 205

**Conclusions générales & Perspectives** **211**

**Bibliographie** **214**

**A Eprouvettes utilisées** **229**
A.1 Éprouvettes pour la caractérisation du comportement cyclique . . . . . 229
A.2 Éprouvettes pour l'étude de la réponse anisotrope . . . . . 231
A.3 Éprouvettes de fatigue . . . . . 233

**B Intégration numérique des équations du comportement** **237**
B.1 Schéma implicite et méthode de Newton locale . . . . . 237
B.2 Résultats issus de la méthode de Newton . . . . . 241
B.3 Cas des éléments coques en contraintes planes . . . . . 243
B.4 Décomposition énergétique . . . . . 247

**C Liste des publications scientifiques** **249**

# Remerciements

Impression étrange que celle de rédiger cette page de remerciements, qui figure au début de ce mémoire mais qui en clôt la rédaction, et qui exige une re-mémorisation de cette aventure de trois ans, pour avoir une pensée pour tous ceux (j'espère n'oublier personne !) sans qui je n'écrirais peut-être pas ces quelques lignes…

Je souhaite tout d'abord exprimer ma gratitude envers les membres de mon jury : les remarques et les questions qu'ils ont soulevées ont permis de donner du relief à ces travaux et je suis honoré d'avoir pu bénéficier de leur expérience et de leur connaissance de la Mécanique des Matériaux. Je remercie donc M. Chaboche d'avoir accepté de présider mon jury, M. Laiarinandrasana et M. Nadot pour leur lecture attentive et critique du manuscrit, ainsi que M. Calloch et M. Bernasconi pour l'intérêt qu'ils ont manifesté et pour leurs questions affûtées.

Le bon déroulement d'une thèse est le résultat d'un travail collectif, et mes pensées vont immédiatement à mes trois encadrants, Habibou, Yann et Ida. Je leur suis infiniment reconnaissant pour leur complémentarité, leur disponibilité, leurs encouragements et leurs conseils, et surtout pour le plaisir réel d'apprendre et de travailler à leurs côtés.

Je n'ai pas eu la chance d'avoir Habibou Maitournam comme professeur lorsque j'étais élève à l'X ; je ne l'avais rencontré au début que comme examinateur, attentif et bienveillant, lors de soutenances de projets étudiants. Mais comment me plaindre, puisqu'en tant que doctorant, j'ai eu le privilège de suivre des cours particuliers avec lui ! Des dizaines d'heures passionnantes à discuter thermodynamique, mécanique ou fatigue, des réponses toujours claires apportées à toutes les nombreuses questions que j'ai pu lui soumettre, avec une patience et une gentillesse jamais démenties : merci mille fois pour tous ces échanges scientifiques mais aussi humains.

Je ne sais par où commencer pour remercier Yann Marco… Dois-je exprimer en premier lieu ma reconnaissance au directeur de thèse, qui m'a transmis sa passion pour l'expérimental et sa volonté de toujours aller plus loin dans la compréhension d'un matériau si emm… intéressant ? au Breton et à sa famille (un grand merci aussi à Brigitte, Manech et Chloé !) qui m'ont fait découvrir et apprécié leur région ? au coéquipier de volleyball et adversaire de badminton (méfie-toi, je m'entraîne !) ? au compagnon de conférences avec qui je partage d'excellents souvenirs, depuis les bars praguois jusqu'aux sommets alpins ? Sans doute tout à la fois, et je suis très heureux que nos routes puissent continuer à se croiser à l'avenir.

Un grand merci aussi à Ida Raoult, qui est à l'origine du projet scientifique et en a assuré le suivi quotidien de façon remarquable, tout en me laissant beaucoup d'autonomie et de liberté. Sans doute n'a-t-elle jamais écrit sa recette de la parfaite encadrante industrielle, mais en voici les grandes lignes : prenez un grand recul scientifique, mélangez-y une cuillerée de pragmatisme, une de rigueur intellectuelle et une autre d'imagination débordante, versez un sachet entier de bonnes idées puis ajoutez de la bonne humeur à volonté, faites quelques schémas pendant la cuisson ; ça s'apprécie sans modération !

Durant ces trois années, j'ai eu l'occasion de partager mon temps entre deux laboratoires académiques et un centre technique industriel, ce qui m'a permis de rencontré de nombreuses personnes, dont beaucoup ont contribué à ces travaux. Je tiens à remercier Bernard Halphen et Patrick Le Tallec, qui m'ont accueilli au sein du Laboratoire de Mécanique des Solides de l'École Polytechnique. Malgré mes visites en coup de vent, j'ai eu l'occasion de faire la connaissance d'une joyeuse équipée de doctorants : merci donc à Camille, Shadan, Fabien, Aurélie, Minh-Bao et tous les autres, pour l'ambiance très sympathique qu'ils ont su créer, sans oublier l'équipe de foot du LMS ! Sur un plan plus professionnel, je remercie Daniel Caldemaison et Éva Héripré pour l'aide qu'ils m'ont apportée concernant les observations au MEB (auxquelles a participé Alejandra), Vincent de Greef pour les essais mécaniques ainsi que Michel Bornert pour son expertise micromécanique. Merci également à Alexandra Joly et Christiane Periam pour avoir su démêler toutes mes interrogations administratives !

Au Laboratoire Brestois de Mécanique et des Systèmes de l'ENSTA Bretagne, j'ai découvert une équipe très dynamique où il fait bon travailler. Merci à Jean-Yves Cognard de m'y avoir accueilli, ainsi qu'à Sylvain Calloch qui anime l'équipe « Fatigue » à laquelle j'étais rattaché. Les semaines de campagne d'essais que j'y ai passées m'ont permis de rencontrer des chercheurs passionnés, où la fibre expérimentale est au service du développement de modèles mécaniques ambitieux. Je remercie en particulier Vincent, Cédric, Shabnam et Didier pour les coups de main sur mes essais, et l'ensemble du laboratoire pour cette atmosphère de recherche stimulante et enthousiasmante. Je serais ingrat en oubliant de citer les doctorants qui en sont une composante indispensable : parmi eux, une dédicace particulière à Vincent (encore !), Rémi, Julien, Alan et bien sûr Loïc.

Enfin, un grand merci à toute l'équipe Mécanique des Structures et des MatériauX (prononcer MSMX) du centre technique PSA à Vélizy, dirigée par Laurent Rota que je remercie pour son accueil et sa confiance, tout d'abord en stage il y a quelques années, puis en thèse, et aujourd'hui en CDI. Si j'ai passé la majorité de ma thèse au sein de cette équipe, c'est avant tout parce qu'elle est composée de personnalités très différentes et très attachantes : on y croise des férus de l'automobile, des gourmands qui ont réussi à instituer la pâtisserie comme monnaie d'échange, des amateurs de sports en tout genre (de la NBA à la Ligue 1 en passant par le triathlon ou le tennis serbe) ou encore quelques mélomanes avertis, le tout dans un environnement scientifique de grande qualité. J'adresse des remerciements un peu plus personnalisés à Fabien, qui m'a converti à la géométrie hyperbolique, à Louis et sa boîte à outils numériques, ainsi qu'à Benoit, toujours partant pour passer du temps à débroussailler un problème compliqué. La présence de nombreux stagiaires, apprentis et doctorants contribue à rendre le cadre de travail très agréable, et un merci tout particulier s'impose à Qianqiang et Nada qui ont contribué durant leur stage à l'avancement de cette thèse. Au-delà du cadre de l'équipe MSMX, merci aussi à Martine Monin, Géraldine Graff, Rémy Bompoint, Nicolas Thévenet, Laurent Béchu, Laurent Perdreau, Sébastien Vauthier, Amélie Bouzid, Christophe Adam et Carine Cabestrero pour l'intérêt porté à mes travaux et pour leur aide.

Je souhaite également remercier Pascal Robichon chezMann+Hummel et Daniel Ayglon chez DuPont sans qui certains essais de la thèse n'auraient pas pu être réalisés, tout comme Thierry Raphenne au CETIM qui m'a démontré que la sous-traitance d'essais peut aussi donner de bons résultats !

Enfin, parce qu'une thèse dure trois ans au cours desquels la motivation peut parfois fluctuer, il est important d'être entouré de personnes dont l'amitié et l'affection permet de relativiser les tracas du doctorant. Merci donc à tous les amis qu'il n'a pas été facile de voir autant que je l'aurais souhaité mais dont le soutien était toujours présent, et mention spéciale à Arnaud, Yann, Thomas, Mathieu et Zhou qui ont pu venir à la soutenance. Enfin, je ne peux terminer ces lignes sans remercier du fond du cœur ma famille dont les encouragements et la confiance m'auront été très précieux.

# Notations

Sauf avis contraire, nous utilisons la sommation implicite d'Einstein sur les indices répétés.

## a Formats

| | |
|---|---|
| $u$ | Scalaire |
| $\underline{u}$ | Vecteur de composantes $u_i$ |
| $\underline{\underline{u}}$ | Tenseur d'ordre 2 de composantes $u_{ij}$ |
| $\mathbb{U}$ | Tenseur d'ordre 4 de composantes $U_{ijkl}$ |

## b Opérateurs

| | | |
|---|---|---|
| $\mathrm{Tr}\,()$ | Trace d'un tenseur d'ordre 2 | $\mathrm{Tr}\left(\underline{\underline{u}}\right) = u_{ii}$ |
| ${}^t$ | Transposé d'un tenseur d'ordre 2 ou 4 | ${}^t u_{ij} = u_{ji},\ {}^t U_{ijkl} = U_{lkji}$ |
| $\cdot$ | Produit simplement contracté | $(\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}})_{ij} = A_{ia} B_{aj}$ |
| $:$ | Produit doublement contracté | $\underline{\underline{A}} : \underline{\underline{B}} = \mathrm{Tr}\left(\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}}\right) = A_{ij} B_{ji}$ |
| $::$ | Produit quadruplement contracté | $\mathbb{A} :: \mathbb{B} = A_{ijkl} B_{lkji}$ |
| $\Vert\ \Vert$ | Norme canonique sur l'espace des tenseurs d'ordre 2 | $\Vert\ \underline{\underline{u}}\ \Vert = \sqrt{\underline{\underline{u}} : \underline{\underline{u}}}$ |
| $\Vert\ \Vert_{\mathbb{M}}$ | Norme associée à la métrique $\mathbb{M}$ | $\Vert\ \underline{\underline{u}}\ \Vert_{\mathbb{M}} = \sqrt{\underline{\underline{u}} : \mathbb{M} : \underline{\underline{u}}}$ |
| $\otimes$ | Produit tensoriel | $(\underline{a} \otimes \underline{b})_{ij} = a_i b_j,\ (\underline{\underline{A}} \otimes \underline{\underline{B}})_{ijkl} = A_{ij} B_{kl}$ |
| $\frac{\partial}{\partial \underline{\underline{u}}}$ | Dérivée partielle | $\frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{u}}} = \frac{\partial f}{\partial u_{ji}}\, \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j$ |
| $\dot{\cdot}$ | Dérivée temporelle | $\dot{f} = \frac{\mathrm{d} f}{\mathrm{d} t}$ |
| $\nabla$ | Gradient | $(\underline{\nabla f})_i = \frac{\partial f}{\partial x_j},\ (\underline{\underline{\nabla V}})_{ij} = \frac{\partial V_i}{\partial x_j}$ |
| div | Divergence | $\mathrm{div} \underline{V} = \frac{\partial V_i}{\partial x_i}$ |
| $\Delta$ | Laplacien | $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i} = \mathrm{div} \underline{\nabla f}$ |
| $\delta$ | Symbole de Kronecker | |
| $\underline{\underline{1}}$ | Tenseur identité d'ordre 2 | $\underline{\underline{1}} = \delta_{ij}\, \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j$ |
| $\mathbb{I}$ | Tenseur identité d'ordre 4 | $\mathbb{I} : \underline{\underline{u}} = \underline{\underline{u}}$ |
| $\mathbb{J}$ | Projecteur sur la partie sphérique | $\mathbb{J} = \frac{1}{3} \underline{\underline{1}} \otimes \underline{\underline{1}}$ |
| $\mathbb{K}$ | Projecteur sur la partie déviatorique | $\mathbb{K} = \mathbb{I} - \mathbb{J}$ |
| $\underline{\underline{\mathrm{dev}}}\,()$ | Déviateur d'un tenseur d'ordre 2 | $\underline{\underline{\mathrm{dev}}}\left(\underline{\underline{u}}\right) = \mathbb{K} : \underline{\underline{u}} = \underline{\underline{u}} - \frac{1}{3} \mathrm{Tr}\left(\underline{\underline{u}}\right) \underline{\underline{1}}$ |
| $\mathbb{P}$ | Tenseur anisotrope de Hill | |

## c Grandeurs mécaniques générales en petites transformations

| | | |
|---|---|---|
| $V$ | Élément de volume, de frontière $\partial V$ | |
| $S$ | Élément de surface, de frontière $\partial S$ | |
| $\underline{x}$ | Vecteur position | |
| $\underline{e}_i$ | Vecteur unitaire de la base canonique | $\lvert \underline{e}_i \rvert = 1,\ \underline{e}_i \cdot \underline{e}_j = \delta_{ij}$ |
| $\underline{\underline{\varepsilon}}$ | Tenseur des déformations linéarisées | |
| $\lambda_{\underline{n}}$ | Élongation dans une direction matérielle $\underline{n}$ | $\lambda_{\underline{n}} = \underline{n} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}} \cdot \underline{n}$ |
| $\underline{\underline{\sigma}}$ | Tenseurs des contraintes de Cauchy | |
| $\sigma_u$ | Contrainte à rupture en traction | |
| $\underline{\underline{s}}$ | Déviateur des contraintes | $\underline{\underline{s}} = \underline{\underline{\mathrm{dev}}}\left(\underline{\underline{\sigma}}\right)$ |
| $\underline{T}_{\underline{n}}$ | Vecteur contrainte sur une facette de normale $\underline{n}$ | $\underline{T}_{\underline{n}} = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}$ |
| $J_2$ | Norme isotrope sur l'espace des déviateurs | $J_2 = \lVert \underline{\underline{\sigma}} \rVert_{\mathbb{K}} = \sqrt{\underline{\underline{\sigma}} : \mathbb{K} : \underline{\underline{\sigma}}}$ |
| | Norme anisotrope sur l'espace des déviateurs | $J_2 = \lVert \underline{\underline{\sigma}} \rVert_{\mathbb{P}} = \sqrt{\underline{\underline{\sigma}} : \mathbb{P} : \underline{\underline{\sigma}}}$ |
| $P$ | Pression hydrostatique sur un élément de volume $V$ | $P = \frac{1}{3}\mathrm{Tr}\left(\underline{\underline{\sigma}}\right)$ |
| $\tau$ | Cisaillement sur une facette de normale $\underline{n}$ | $\tau = \left\lvert \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} - \left(\underline{n} \cdot \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}\right) \underline{n} \right\rvert$ |
| $\mathbb{C}$ | Tenseur des modules élastiques | $\underline{\underline{\sigma}} = \mathbb{C} : \underline{\underline{\varepsilon}}$ en élasticité linéaire |
| $\mathbb{S}$ | Tenseur des souplesses | $\mathbb{S} = \mathbb{C}^{-1}$ |
| $K_t$ | Facteur de concentration de contrainte | |
| $K_I,\ K_{II},\ K_{III}$ | Facteurs d'intensité de contrainte | |

## d Grandeurs micromécaniques

| | | |
|---|---|---|
| $f_i$ | Fraction volumique de la phase $i$ | $\sum_i f_i = 1$ |
| $\langle\rangle$ | Moyenne par phase | $\langle u \rangle = f_i u_i$ |
| $\mathbb{A}^i$ | Tenseur de localisation dans la phase $i$ | |
| $\underline{\underline{E}}$ | Tenseur des déformations macroscopique | $\underline{\underline{E}} = \left\langle \underline{\underline{\varepsilon}} \right\rangle$ |
| $\underline{\underline{\varepsilon}}_i$ | Tenseur des déformations moyennes dans la phase $i$ | $\underline{\underline{\varepsilon}}_i = \mathbb{A}^i : \underline{\underline{E}}$ |
| $\underline{\underline{\Sigma}}$ | Tenseur des contraintes macroscopique | $\underline{\underline{\Sigma}} = \left\langle \underline{\underline{\sigma}} \right\rangle$ |
| $\underline{\underline{\sigma}}_i$ | Tenseur des contraintes moyennes dans la phase $i$ | |
| $\mathbb{C}^i$ | Tenseur des modules élastiques de la phase $i$ | |
| $\tilde{\mathbb{C}}$ | Tenseur des modules élastiques effectif (macroscopique) | $\tilde{\mathbb{C}} = \langle \mathbb{A} : \mathbb{C} \rangle = f_i\, \mathbb{C}^i : \mathbb{A}^i$ |
| $\mathbb{E}^{I,0}$ | Tenseur d'Eshelby relatif à une inclusion $I$ dans une matrice 0 | |
| $\mathbb{C}^*$ | Tenseur d'influence de Hill | $\mathbb{C}^* = \mathbb{C}^0 : \left(\left(\mathbb{E}^{I,0}\right)^{-1} - \mathbb{I}\right)$ |
| $r$ | Rapport d'aspect des fibres | diamètre / longueur |

## e Grandeurs mécaniques de la loi de comportement

| | | |
|---|---|---|
| $w$ | Énergie libre de Helmholtz | |
| $\varphi^*$ | Potentiel dual de dissipation | |
| $T$ | Température (absolue ou relative) | $T(\mathrm{K}) = T(^\circ\mathrm{C}) + 273.15$ |
| $\rho$ | Masse volumique | |
| $s$ | Entropie massique | $s = -\frac{\partial w}{\partial T}$ |
| $\underline{q}$ | Flux de chaleur | |
| $\underline{\underline{\varepsilon}}_i$ | Composante physique de la déformation totale | $\underline{\underline{\varepsilon}}_i \equiv \underline{\underline{\varepsilon}}_e$, $\underline{\underline{\varepsilon}}_{v1}$, $\underline{\underline{\varepsilon}}_{v2}$ ou $\underline{\underline{\varepsilon}}_{vp}$ |
| $\underline{\underline{\mathcal{A}}}_i$ | Force thermodynomique associée à $\underline{\underline{\varepsilon}}_i$ | $\underline{\underline{\mathcal{A}}}_i = -\rho\frac{\partial w}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}_i}$ |
| $\mathscr{D}_1$ | Dissipation intrinsèque | |
| $\Delta W_{\text{diss}}$ | Densité d'énergie dissipée sur un cycle | $\Delta W_{\text{diss}} = \int_{\text{cycle}} \mathscr{D}_1 \, \mathrm{d}t$ |
| $\Delta W_{\text{stock}}$ | Variation de densité d'énergie stockée sur un cycle | $\Delta W_{\text{stock}} = \Delta\left(\rho w\right)$ |
| $\Delta W_{\text{tot}}$ | Densité d'énergie mécanique totale apportée par le milieu extérieur sur un cycle | $\Delta W_{\text{tot}} = \Delta W_{\text{diss}} + \Delta W_{\text{stock}}$ |
| $\Delta p$ | Déformation viscoplastique cumulée sur un cycle | $\Delta p = \int_{\text{cycle}} \sqrt{\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}_{vp} : \mathbb{P}^{-1} : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}_{vp}} \, \mathrm{d}t$ |

## f Grandeurs liées à la distribution d'orientation des fibres

| | | |
|---|---|---|
| $\theta, \phi$ | Angles d'Euler | |
| $\Omega$ | Sphère unité | |
| $\mathrm{d}\omega$ | Secteur angulaire élémentaire | $\mathrm{d}\omega = \sin\theta \, \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\phi$ |
| $\underline{p}$ | Vecteur de position angulaire | |
| $\psi$ | Distribution d'orientation des fibres | |
| $\underline{\underline{a}}^\psi$ | Tenseur d'orientation d'ordre 2 | $\underline{\underline{a}}^\psi = \int_\Omega \underline{p} \otimes \underline{p} \, \psi(\underline{p}) \, \mathrm{d}\omega$ |
| $\mathbb{A}^\psi$ | Tenseur d'orientation d'ordre 4 | $\mathbb{A}^\psi = \int_\Omega \underline{p} \otimes \underline{p} \otimes \underline{p} \otimes \underline{p} \, \psi(\underline{p}) \, \mathrm{d}\omega$ |
| $a_i$ | Valeur propre de $\underline{\underline{a}}^\psi$ | |
| $\underline{u}_i$ | Vecteur propre de $\underline{\underline{a}}^\psi$ | $\underline{\underline{a}}^\psi = a_i \, \underline{u}_i \otimes \underline{u}_i$ |

## g Grandeurs du modèle thermo-hygrométrique

| | | |
|---|---|---|
| $c_p$ | Chaleur spécifique (capacité thermique massique) | |
| $\lambda$ | Conductivité thermique | |
| $h$ | Coefficient d'échange convectif thermique | |
| $\mathcal{H}$ | Taux d'humidité relatif ambiant (dans l'air) | |
| $C_{\mathrm{H_2O}}$ | Teneur massique en eau (d'un thermoplastique) | |
| $h_{\mathrm{RH}}$ | Coefficient d'échange convectif hygrométrique | |
| $D$ | Coefficient de diffusion hygrométrique | |
| $E_a$ | Énergie d'activation | |
| $R$ | Constante des gaz parfaits | $R = 8.314 \ \mathrm{J.mol^{-1}.K^{-1}}$ |
| $T_g$ | Température de transition vitreuse | |

## h Notations liées à la fatigue

| | | |
|---|---|---|
| $N$ | Nombre de cycles au cours du chargement de fatigue | |
| $N_r$ | Nombre de cycles à rupture | |
| $N_a$ | Nombre de cycles à amorçage | |
| $N_p$ | Nombre de cycles de propagation | $N_r = N_a + N_p$ |
| $a$ | Demi-longueur de fissure | |
| $R$ | Rapport de charge | $R = \sigma_{\text{min}}/\sigma_{\text{max}}$ |
| $K$ | Raideur apparente sécante | $K = \Delta\sigma/\Delta\varepsilon$ en uniaxial |
| $\rightarrow$ | Essai de fatigue non rompu | |
| $e$ | Erreur quadratique en durée de vie logarithmique (pour une base expérimentale comportant $n$ essais) | $e = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\log N_a^{\text{exp},i} - \log N_a^{\text{sim},i}\right)^2}{n}}$ |
| $\Delta W_{\text{diss}}$ | Densité d'énergie dissipée sur un cycle | $\Delta W_{\text{diss}} = \Delta W_{\text{ve}} + \Delta W_{\text{vp}} + \Delta W_{\text{s}}$ |
| $\Delta W_{\text{ve}}$ | Densité d'énergie dissipée sur un cycle par viscoélasticité | |
| $\Delta W_{\text{vp}}$ | Densité d'énergie dissipée sur un cycle par viscoplasticité | |
| $\Delta W_{\text{s}}$ | Densité d'énergie dissipée sur un cycle par adoucissement | |

# Introduction

## Enjeux et objectifs de la thèse

### Contexte industriel

L'industrie automobile est confrontée à un enjeu technologique et écologique majeur, celui de l'allègement des véhicules, qui répond à la volonté de limiter la consommation en carburant et de réduire l'impact environnemental en matière d'émissions de gaz à effet de serre. Le remplacement de structures métalliques par des composants en thermoplastiques renforcés en fibres de verre courtes est une solution mettant à profit les bonnes propriétés mécaniques spécifiques de ce type de matériau. En outre, leur facilité de mise en forme autorise, pour un coût modéré, la conception de structures de géométrie complexe et potentiellement multi-fonctionnelles.

Les pièces du circuit d'admission d'air, en particulier le répartiteur d'air à l'admission et le raccord de sortie du turbo (voir la figure 1), ont été parmi les premières à faire l'objet du passage des matériaux métalliques vers les composites à matrice thermoplastique. Ces composants sont soumis à des sollicitations cycliques de pression pulsée conséquentes au fonctionnement du turbo-compresseur, et doivent donc être conçues pour présenter une résistance suffisante à la fatigue. Cependant, la diminution de la cylindrée des moteurs à puissance comparable (*down-sizing*), autre axe de réduction des émissions polluantes, explique que l'environnement thermique à proximité du groupe moto-propulseur soit plus sévère. Ceci rend indispensable l'emploi d'une procédure de dimensionnement à la fatigue qui prenne en compte les mécanismes spécifiques de déformation et d'endommagement des thermoplastiques renforcés en fibres de verre courtes, dans des conditions environnementales représentatives de la vie en service.

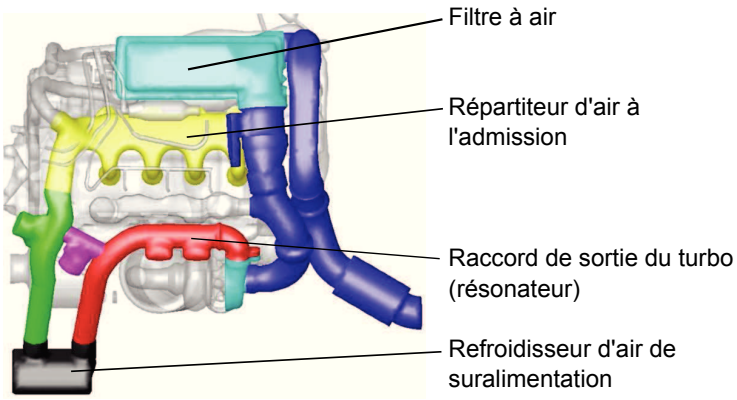



FIGURE 1 – Circuit d'admission d'air sur le moteur DV6 (Diesel 1.6 litre) du véhicule C4 Picasso.

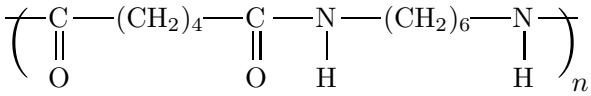


FIGURE 2 – Formulation chimique de l'élément de répétition du polyamide 66.

## Matériau et procédé de l'étude

Dans ces travaux de thèse, nous avons choisi de nous concentrer sur un matériau particulier, un polyamide 66 renforcé en fibres de verre courtes à 35 % en masse (PA66-GF35), commercialisé par Dupont™ sous l'appellation *Zytel® 70G35 HSLX*. Ce matériau est représentatif d'une large gamme d'applications sur les véhicules du groupe PSA Peugeot Citroën.

Le polyamide 66, qui constitue la matrice de ce composite, est un thermoplastique semi-cristallin dont la structure chimique est représentée sur la figure 2. Sa bonne résistance à la température, que l'on peut quantifier par l'intermédiaire de sa température de fusion (263 ˚C) ou de dégradation (300 ˚C) élevées, explique que le PA66-GF35 puisse être employé au voisinage du moteur, où sa faible masse volumique (1410 kg.m$^{-3}$) permet de concevoir des pièces significativement plus légères qu'avec les matériaux métalliques.

Cependant, l'emploi de composites à matrice thermoplastique pour des composants sollicités mécaniquement suppose de bien maîtriser la sensibilité de ce matériau à la température, mais également au taux d'humidité ambiant. En effet, le polyamide est un thermoplastique fortement hydrophile, pouvant absorber jusqu'à 8.5 % d'eau en masse, ce qui affecte ses propriétés physiques. Nous pouvons illustrer cette dépendance à l'aide de la température de transition vitreuse du polyamide 66, qui avoisine 80 ˚C pour le matériau sec (selon le grade) et chute quand la teneur en eau augmente.

Cette double sensibilité à la température et à l'humidité de la matrice polyamide explique que les caractéristiques mécaniques (linéaires et non linéaires) soient très variables en fonction de l'environnement hygrothermique : le module de Young du PA66 peut ainsi varier de 400 à 3100 MPa pour des conditions représentatives de la vie en service. La première difficulté de l'étude consiste donc en la compréhension de l'activation hygrothermique des mécanismes de déformation du matériau, de façon à proposer un modèle de comportement applicable aux sollicitations enregistrées sur véhicule.

D'autre part, les pièces en thermoplastique sont moulées par injection (voir la figure 3). Ce procédé est compatible avec les cadences de production exigées par l'industrie automobile et offre une grande liberté de formes géométriques. Le choix de renforts sous forme de fibres courtes (diamètre moyen : 10 microns, longueur moyenne : 250 microns) permet d'augmenter de façon très sensible la raideur du matériau, tout en conservant le procédé de mise en forme par injection : le matériau composite obtenu est un excellent compromis, possédant des propriétés mécaniques suffisantes pour des applications structurales de faible masse, ainsi qu'un coût inférieur aux métaux.

Le moulage par injection soulève des problèmes rhéologiques complexes [140], dont l'analyse est en dehors du cadre de cette thèse. Cependant, nous devons prendre en considération le fait que la cinématique locale de l'écoulement de matière conditionne la distribution d'orientation des fibres dans la pièce injectée, et a donc une influence forte sur les propriétés mécaniques locales. En effet, comme l'illustre la figure 4, le fort élancement des renforts explique qu'un état d'orientation préférentiel se traduit par une anisotropie significative des propriétés mécaniques. Par ailleurs, dans le cas de structures minces, ce qui est le cas usuel pour les applications qui nous concernent, les fibres s'orga-

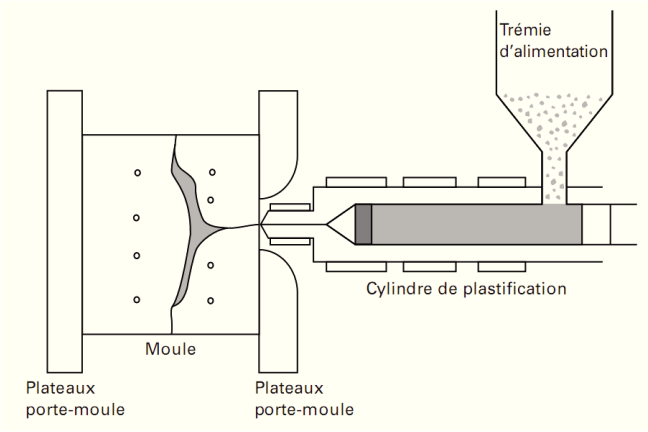



FIGURE 3 – Procédé de moulage par injection d'un thermoplastique chargé (source DuPont™) :
1. Plastification et dosage des granulés dans la vis à injection ;
2. Injection sous pression de la matière fondue ;
3. Compactage et refroidissement dans le moule régulé en température.

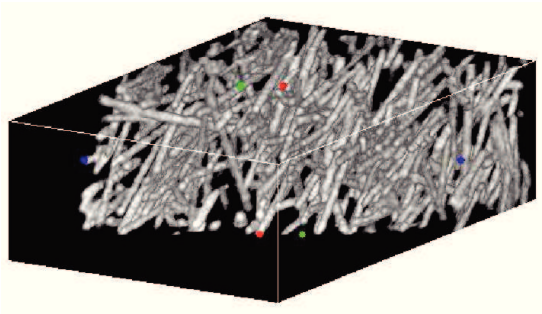


FIGURE 4 – Reconstruction 3D à partir d'une microtomographie aux rayons X d'un échantillon prélevé sur une éprouvette injectée en PA66-GF35.

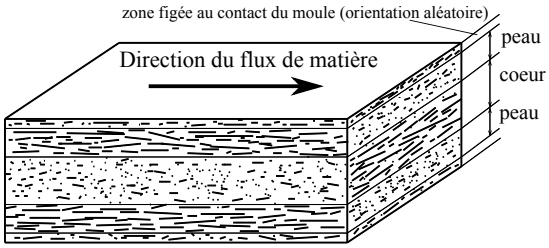



FIGURE 5 – Représentation schématique de l'organisation des fibres en structure cœur-peau selon la direction du flux d'injection (*Moulding Flow Direction*).

nisent selon une structure cœur-peau (figure 5) : à l'hétérogénéité spatiale des propriétés mécaniques s'ajoute une hétérogénéité sur l'épaisseur. Le matériau composite présente donc différentes échelles d'observation (fibre/matrice, « pli » d'orientation relativement homogène, élément homogénéisé sur l'épaisseur), ce qui constitue la seconde difficulté propre à l'analyse des composites renforcés en fibres de verre courtes.

## Objectifs scientifiques et industriels

Le but de cette thèse est de fournir une méthode de dimensionnement à la fatigue des thermoplastiques renforcés en fibres de verre courtes. L'approche développée doit être compatible avec le cadre industriel en bureau d'études chez PSA Peugeot Citroën, et doit s'attacher à décrire les différents cas de sollicitations rencontrés lors de la vie en service d'un véhicule (chargements mécaniques cycliques, conditions environnementales variables).

# Démarche scientifique

## Découplage comportement-fatigue

Ces travaux de thèse reposent sur une stratégie de dimensionnement à la fatigue en deux étapes, qui a été mise en œuvre avec succès chez PSA Peugeot Citroën pour une grande variété d'applications : collecteurs d'échappement en acier et en fonte, culasses en aluminium, suspentes en élastomère, etc. Elle repose sur l'hypothèse fondamentale qu'il est possible de découpler l'étude de la réponse mécanique cyclique de celle de l'endommagement en fatigue. Cette approche est valide à partir du moment où l'on peut montrer une « stabilisation » de l'évolution des variable mécaniques locales, qui intervient « rapidement » devant la rupture en fatigue de la structure [1]. La durée de vie de cette dernière est supposée corrélée à une grandeur physique, mesurée en régime stabilisé, et dont la nature dépend des mécanismes d'endommagement propre au type de matériau étudié.

Cette démarche s'oppose intrinsèquement aux approches en endommagement continu, qui postulent l'existence d'une variable interne $d$, appelée endommagement. $d$ est nul pour un matériau vierge, sa croissance est activée par les évolutions locales des variables mécaniques et induit une dégradation des propriétés du matériau ; la rupture en fatigue de l'échantillon intervient quand $d$ prend la valeur 1. Malgré une justification physique forte, l'approche en endommagement continu, que Nouri et al. [151] ont développé pour les thermoplastiques renforcés en fibres de verre courtes, est difficilement compatible avec une application dans un cadre industriel : prédire la durée de vie d'une structure revient à simuler l'ensemble des cycles de chargement, jusqu'à obtenir $d = 1$ !

Le découplage comportement-fatigue signifie que la cinétique d'évolution de l'endommagement est suffisamment lente, et/ou a suffisamment peu d'influence sur le comportement du matériau pour que l'on puisse observer une stabilisation de la réponse mécanique sur une grande fraction de la durée de vie. Seuls les « premiers » cycles du chargement doivent donc être simulés, condition indispensable au vu des délais de conception dans l'industrie automobile. Nous prendrons soin de vérifier au cours de nos travaux l'hypothèse de stabilisation de la réponse mécanique, de façon à garantir la validité de notre démarche.

## Organisation du manuscrit

L'hypothèse de découplage comportement-fatigue explique l'organisation de ce manuscrit en deux grandes parties, qui traitent des deux aspects successifs de la démarche de dimensionnement. La structure logique du document est résumée sur la figure 6.

La première partie, consacrée à l'étude du comportement cyclique, débute par une étude bibliographique (chapitre 1) qui a pour objectifs de mettre en évidence les mécanismes physiques de déformation des thermoplastiques chargés, et de faire un état de l'art sur les modélisations développées dans la littérature pour décrire la réponse mécanique cyclique de ces matériaux. Le chapitre 2 expose le développement d'un modèle thermo-hygrométrique couplé qui permet d'analyser les sollicitations rencontrées lors de la vie en service, et de déterminer la plage de conditions environnementales (température et humidité) pour laquelle notre démarche doit s'appliquer. Le chapitre 3 est le cœur de cette première partie : nous y exposons la construction du modèle de comportement cyclique non linéaire des thermoplastiques renforcés en fibres de verre courtes. Les équations du comportement sont proposées à partir d'une base d'essais particulièrement riche sur le PA66-GF35 de l'étude en conditions standard. Le chapitre 4 permet de démontrer que le modèle de comportement est valide pour une large

1. Les guillemets indiquent des notions qui seront détaillées au cours de nos travaux.

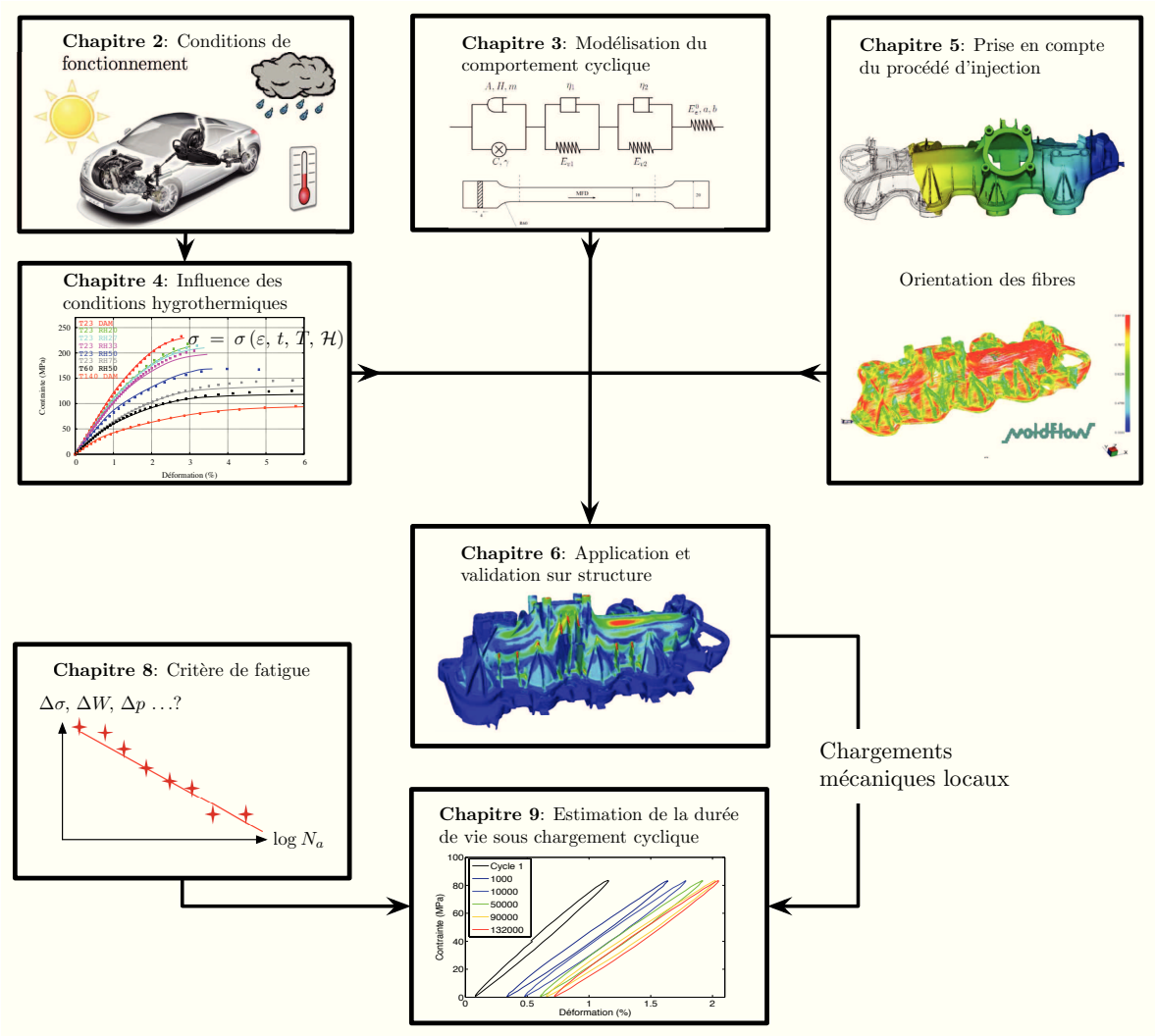



FIGURE 6 – Schéma synthétique de la démarche développée dans le manuscrit.

gamme de conditions environnementales ; une loi d'équivalence température-humidité est proposée et validée de façon à simplifier la démarche de dimensionnement des composites à matrice polyamide. Le chapitre 5 fait le lien avec le procédé d'injection : les caractéristiques mécaniques (linéaires et non linéaires) du matériau sont formulées de façon à intégrer les informations de la distribution d'orientation des fibres. Ce chapitre est essentiel pour permettre le passage du procédé de mise en forme à la simulation de la réponse d'une structure mécanique. Cette étape est validée au chapitre 6, dans un premier temps sur des éprouvettes hétérogènes, puis sur un répartiteur d'air à l'admission.

La seconde partie du manuscrit a pour objectif la proposition d'un critère de fatigue, c'est-à-dire la mise en évidence d'une corrélation entre une grandeur physique, issue de la simulation de la réponse mécanique cyclique, avec le nombre de cycles nécessaires à l'apparition d'une fissure de fatigue. Le chapitre 7 est un état de l'art concernant les études publiées dans la littérature au sujet de la fatigue des composites à matrice thermoplastique. Nous y justifions le caractère stationnaire de la

réponse mécanique cyclique, et analysons les mécanismes d'endommagement à l'échelle locale, avant de conclure sur le fait qu'aucun critère ne fait consensus sur la prise en compte de la sensibilité de la tenue en fatigue à l'ensemble des cas de chargements rencontrés sur véhicule. Le chapitre 8 expose le retraitement d'essais de fatigue publiés dans la littérature pour le PA66-GF35 à l'aide de la loi de comportement développée en partie I. La description de la réponse mécanique non linéaire permet d'enrichir la comparaison entre les différents modèles de fatigue envisagés, et nous montrons que la densité d'énergie dissipée par cycle est la grandeur physique qui présente la meilleure corrélation avec la tenue en fatigue. Le chapitre 9 confirme la pertinence d'un critère énergétique pour estimer la durée de vie du matériau de l'étude sur une large gamme de sollicitations. Nous discutons également de ses avantages sur le critère de fatigue proposé par Klimkeit [112], qui fait office de référence en raison de son large spectre d'application. Notre analyse s'appuie sur une base expérimentale étendue, faisant intervenir différents cas de chargements locaux et différentes conditions environnementales.

# Première partie

# Comportement

# Chapitre 1

# Étude bibliographique

## Sommaire


**1.1 Les matériaux polymères . . . . . 10**
1.1.1 Généralités sur les polymères . . . . . 10
1.1.2 Chimie des polymères . . . . . 11
1.1.3 Les thermoplastiques semi-cristallins . . . . . 13
**1.2 Mécanismes physiques de déformation des thermoplastiques semi-cristallins . 15**
1.2.1 Déformation des lamelles cristallines . . . . . 15
1.2.2 Déformation de la phase amorphe . . . . . 17
1.2.3 Déformation des sphérolites . . . . . 19
1.2.4 Influence des conditions environnementales : cas particulier des polyamides 19
1.2.5 Modélisation du comportement de la matrice polyamide 66 . . . . . 21
**1.3 Modélisation du comportement des thermoplastiques renforcés . . . . . 23**
1.3.1 Approches micromécaniques . . . . . 23
1.3.2 Approches phénoménologiques . . . . . 30
1.3.3 Discussion . . . . . 39


Après avoir effectué une rapide présentation des matériaux polymères en général et des thermoplastiques semi-cristallins en particulier, nous nous attachons ensuite dans cette étude bibliographique à la compréhension de leurs mécanismes de déformation, qui sont fortement liés à leur microstructure. Dans un troisième temps, nous abordons la modélisation du comportement des thermoplastiques renforcés de fibres de verre ; les hétérogénéités microstructurales de la matrice thermoplastique sont alors négligées devant le contraste de propriétés fibre/matrice. Nous présentons tout d'abord l'approche micro-mécanique, et les méthodes de transition d'échelle permettant de passer d'une description du comportement phase par phase à une modélisation homogénéisée à l'échelle du composite, à l'aide de la connaissance de la microstructure. L'approche phénoménologique, à l'inverse, consiste en la proposition d'une loi de comportement directement homogénéisée à l'échelle macroscopique. Dans ce cas, les mécanismes de déformation s'appuient sur les caractéristiques macroscopiques de la réponse mécanique ; ils trouvent néanmoins leur justification physique dans la compréhension des micromécanismes de déformation du polymère. C'est la raison pour laquelle nous illustrons cette approche à l'aide des modèles proposés pour les thermoplastiques seuls, puis renforcés en fibres de verre. Nous concluons en nous fixant pour objectif de développer dans cette partie une modélisation du comportement cyclique des thermoplastiques renforcés en fibres de verre courtes conciliant, si possible, les avantages des deux approches.

## 1.1 Les matériaux polymères

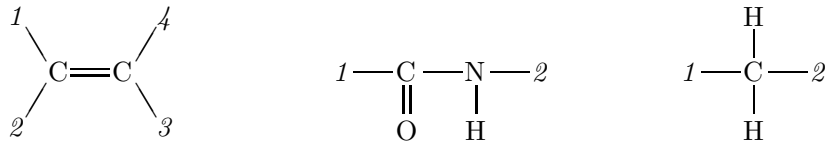
### 1.1.1 Généralités sur les polymères

Les polymères sont des macromolécules formées par des enchaînements covalents d'un grand nombre de motifs élémentaires, appelés monomères. Les monomères sont des groupements d'atomes autour d'un atome de carbone ou de silicium (cas des silicones). On peut distinguer les polymères d'origine naturelle (les protéines, l'ADN, le latex), les polymères artificiels obtenus par réaction chimique à partir de matériaux naturels (tels que le caoutchouc naturel, obtenu par vulcanisation du latex), et les polymères synthétiques qui représentent aujourd'hui 90 % du marché. Par exemple, le polyamide 66 est synthétisé par polycondensation (élimination d'eau) de l'acide adipique avec l'hexaméthylènediamine (HMDA) [35].

Les polymères sont omniprésents dans la vie courante. Si certains, d'origine naturelle, sont connus et utilisés depuis des millénaires (le latex, le coton, la laine), il faut attendre la révolution industrielle et la découverte par Charles Goodyear en 1839 du procédé de vulcanisation pour assister à leur émergence en laboratoire. Les frères Hyatt inventent le celluloïd en 1870 (remplaçant de l'ivoire pour les boules de billard, puis appliqué aux support des pellicules argentiques), Baeckland synthétise la bakélite en 1907 (utilisée pour les boîtiers de radios, ustensiles de cuisine...), DuPont de Nemours brevète le nylon – nom commercial du polyamide – en 1938 et connaît un succès mondial avec l'application aux fameux bas-nylon. Au sortir de la seconde guerre mondiale, les polymères connaissent un développement industriel massif et envahissent le quotidien. Au fur et à mesure des découvertes s'agrandit le champ d'application des matériaux polymères et ces derniers sont aujourd'hui utilisés dans de nombreux secteurs [86, 124] :

- l'emballage (25 % des débouchés en valeur), exploitant la bonne résistance au vieillissement et les propriétés de barrière chimique de nombreux polymères : bouteilles plastiques en PET, sacs et sachets en polystyrène... ;
- le bâtiment (18 % des débouchés) : fenêtres en PVC, équipements sanitaires... ;
- la mise en forme de tuyaux (polypropylène), plaques, films, profilés (14 % des débouchés) : industrie lourde très capitalistique qui alimente les entreprises des secteurs précédents en produits de base ;
- les pièces techniques (37 % des débouchés), avec notamment une forte part de l'industrie automobile en pleine croissance, mais aussi de l'aéronautique, du médical, de l'électronique, des articles de sports et loisirs... Parmi les avantages des matériaux plastiques, on retiendra leur facilité de mise en forme, leur importante raideur spécifique lorsqu'ils sont renforcés, ainsi que leurs propriétés isolantes ;
- les articles de consommation courante (7 % des débouchés) : textiles (fibres de polyamide et de polyester), articles de bureau, ustensiles divers...

On les rencontre sous forme de pièces moulées, injectées, de tubes, de films, de mousses, de fibres, etc ainsi qu'avec des renforts éventuels permettant d'augmenter leur rigidité (fibres de verre ou de carbone, noir de carbone pour les caoutchoucs, sphérules, feuilles pour les stratifiés), ou avec des adjuvants modifiant leurs propriétés (plastifiants, colorants, anti-oxydants, catalyseurs, etc). On trouvera une description davantage orientée vers les polyamides dans [80].




vinyle amide méthyle

FIGURE 1.1 – Exemple de monomères de différentes fonctionnalités : 4 pour le vinyle, 2 pour le groupement amide ou pour le groupement méthyle.

### 1.1.2 Chimie des polymères

Cette grande diversité d'applications s'explique par la grande variété de propriétés physiques des polymères. Pour mieux comprendre leur origine, intéressons-nous à la structure chimique des polymères. Il existe plusieurs façons de classifier les matériaux polymères, nous choisissons ici de les classifier en fonction de l'échelle d'observation [86, 157].

#### a Échelle moléculaire

L'atome de base le plus couramment rencontré dans les chaînes polymériques est le carbone. Ainsi, les monomères de base (extraits lors du raffinage du pétrole) sont très souvent des assemblages simples de fonctions hydrocarbures, aldéhydes, cétones, amides ou benzène. D'autres atomes peuvent composer la trame de la chaîne primaire : on trouve ainsi des atomes d'oxygène pour les polyéthers (éléments C–O–C), ou d'azote pour les polyamides (éléments C–N–C). Des atomes (chlore, fluor, phosphore, etc.) ou des groupements moléculaires plus complexes peuvent composer des radicaux liés à la chaîne principale [35].

Les atomes de la chaîne polymérique sont liés par des liaisons covalentes (simples, doubles voire triples). Ces liaisons sont fortes (elles nécessitent un apport énergétique élevé pour être rompues) et directionnelles. Le degré de valence d'un atome ou le nombre de fonctionnalité d'un monomère conditionne alors le type de structure polymérique réalisable : linéaire dans le cas d'éléments bi-fonctionnels, avec des ramifications dans le cas d'éléments de fonctionnalité plus élevée intercalés dans de longues séquences linéaires, voire tri-dimensionnelles avec de nombreux éléments tri- ou quadri-fonctionnels (voir figure 1.1). Nous constatons ainsi que l'organisation moléculaire conditionne la structure macro-moléculaire, ce que nous allons décrire par la suite.

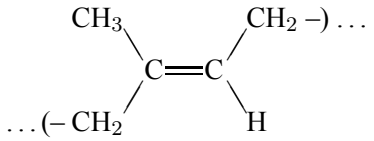
#### b Échelle macromoléculaire

A l'échelle macromoléculaire, nous pouvons tout d'abord distinguer les *homopolymères*, assemblés à partir du même monomère, et les *copolymères*, formés à partir d'au moins deux monomères différents. Ces copolymères seront dits alternés, séquencés, statistiques ou ramifiés suivant le type d'enchaînement des monomères de base [35].

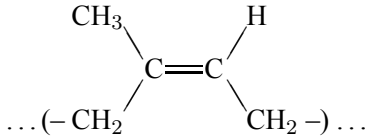
Dans le cas des polymères linéaires, la *tacticité* ou *stéréo-isomérie* permet ensuite de caractériser plus finement le type de séquençage, suivant la position géométrique relative des monomères (radicaux toujours du même côté de la chaîne principale : isotacticité, positionnés de façon alternée : syndiotacticité, ou de façon aléatoire : atacticité). Cette régularité configurationnelle de l'agencement des monomères pour former la chaîne polymérique est importante, car elle pilote notamment la capacité de cristallisation.

Les polymères possédant des liaisons covalentes doubles, autour desquelles la rotation moléculaire est impossible, présentent un autre type d'isomérie configurationnelle. On parlera ainsi d'isomères cis- ou trans- comme dans le cas du polyisoprène (voir figure 1.2).

Enfin, les isoméries conformationnelles [1] permettent de distinguer les différents agencements spatiaux accessibles par rotation autour des liaisons covalentes simples. Plus une conformation présente une énergie potentielle faible, plus elle est probable. L'augmentation de la température permet d'activer le passage d'une conformation à l'autre. La figure 1.3 illustre le cas classique de la transformation trans-trans vers trans-gauche du polyéthylène.

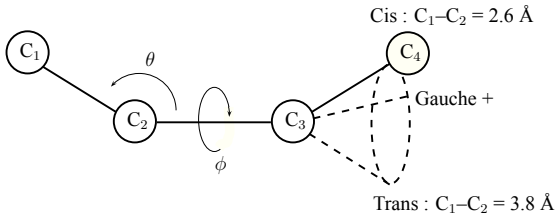



poly cis-isoprène (Hévéa)




poly trans-isoprène (Gutta-percha)

FIGURE 1.2 – Exemple d'isomérie configurationnelle pour le caoutchouc naturel.



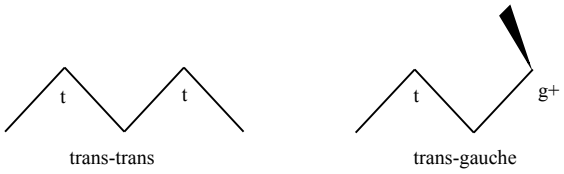




FIGURE 1.3 – Isoméries conformationnelles cis, trans et gauche sur la molécule de butane et transformation conformationnelle du polyéthylène.

La longueur des chaînes dépend du degré de polymérisation, et conditionne de nombreuses propriétés physiques des polymères (voir ci-dessous). Notons qu'une mesure pratique de la longueur moyenne des chaînes polymériques est la masse molaire, définie comme le produit du nombre $n$ de monomères par leur masse molaire, calculée en additionnant les masses molaires des atomes constituant le motif de base. Différentes techniques expérimentales permettent d'évaluer cette grandeur statistique sur un échantillon [35].

### c Échelle supra-moléculaire

Au niveau supra-moléculaire, on distingue les différents types de réseaux macromoléculaires formés par les chaînes polymériques.

Dans le premier cas, les chaînes macromoléculaires linéaires (éventuellement ramifiées) sont liées entre elles par des liaisons faibles (de type interactions de Van der Walls, liaisons hydrogène ou interactions ioniques). Ces liaisons, du fait de leur très grand nombre, permettent la cohésion d'ensemble d'un réseau polymérique, mais autorisent néanmoins des mouvements coopératifs d'ensemble des

1. Les isomères de configuration diffèrent les uns des autres au moins par les liaisons fortes (covalentes), tandis que les isomères conformationnels diffèrent seulement par les liaisons faibles [70].

chaînes les unes par rapport aux autres. Ces mouvements sont activés thermiquement, et à haute température, ce réseau devient malléable, voire fluide. On parle alors de *thermoplastiques*, au caractère recyclable puisqu'il suffit de les chauffer pour les remettre en forme. Les thermoplastiques existent sous forme amorphe ou semi-cristalline (mélange de phases amorphes et cristallines), ce que nous allons détailler par la suite.

Dans le second cas, les chaînes peuvent former des réseaux covalents tri-dimensionnels aux multiples points de réticulations. Ces configurations ne sont possibles qu'en présence de sites actifs possédant au minimum 3 fonctionnalités pour permettre de nombreux branchements. Le réseau obtenu est alors rigide même à haute température, on parle de *thermodurcissables*. Une fois polymérisé, un thermodurcissable ne peut plus être remis en forme : il n'est pas recyclable puisque l'élévation trop importante de la température ne produit qu'une dégradation du matériau.

Les *élastomères* constituent une famille un peu particulière. Il s'agit de thermoplastiques auxquels on fait subir un deuxième traitement : la vulcanisation. Ce procédé consiste en la création à chaud de pontages (par exemple des liaisons soufre entre les atomes de carbone de deux chaînes voisines) qui permettent de réticuler le réseau macromoléculaire. La densité de réticulation est généralement bien plus faible que dans le cas des thermodurcissables – de l'ordre d'un pont pour cent atomes de la chaîne carbonée ; le réseau est ainsi flexible et permet donc de grandes déformations réversibles.

### 1.1.3 Les thermoplastiques semi-cristallins

Nous nous concentrons maintenant sur la famille des thermoplastiques, et plus particulièrement des thermoplastiques semi-cristallins, à laquelle appartiennent les polyamides, et en particulier le polyamide 66.

#### a Phase amorphe et température de transition vitreuse

Les polymères de masse molaire élevée (c'est-à-dire grande devant la masse molaire critique d'enchevêtrement) sont généralement à l'état amorphe [2]. Les chaînes sont assez longues pour que le polymère présente une cohésion d'ensemble, mais lorsque l'on soumet un échantillon à une diffraction aux rayons X, on n'observe pas d'ordre structurel (halo amorphe). Les chaînes sont alors dans une configuration de pelote statistique.

La phase amorphe est à l'état vitreux à basse température, où les mouvements entre chaînes sont fortement réduits, et à l'état caoutchoutique à haute température. Le module de rigidité subit alors une forte décroissance (quelques décades), l'allongement à rupture augmente sensiblement. La température de transition entre ces deux états est appelée *température de transion vitreuse*, notée $T_g$. La transition vitreuse n'est pas une transformation thermodynamique, mais traduit juste un effet cinétique sur la mobilité des chaînes. Le passage de la transition vitreuse se manifeste également par une augmentation des phénomènes de dissipation visqueuse. À température plus élevée encore (au-delà de 300 °C pour un polyamide 66), la rupture des liaisons covalentes entraîne la dégradation du matériau.

#### b Morphologie cristalline

Les polymères qui présentent une régularité suffisante, c'est-à-dire une configuration régulière (iso- ou syndiotacticité, faible degré de ramification, absence de radicaux latéraux) et une conformation régulière (zig-zag planaire ou hélice) sont susceptibles de cristalliser, c'est-à-dire qu'une diffrac-

2. La masse molaire de la matrice polyamide 66 du matériau de l'étude est modérée : $M_n$ = 18 kg.mol$^{-1}$ (moyenne en nombre) et $M_w$ = 34 kg.mol$^{-1}$ (moyenne en masse).

tion aux rayons X met en évidence un ordre cristallin [79, 86]. L'organisation cristalline répond à une logique de réduction d'entropie. Elle nécessite cependant un apport d'énergie de façon à favoriser la reptation des macromolécules dans des configurations minimisant l'entropie. Les chaînes de poids moléculaire plus faible, plus petites donc plus mobiles, cristallisent plus facilement.

Le degré de cristallinité des thermoplastiques est généralement compris entre 35 et 55 %, et vaut 36 % dans le cas du PA66-GF35 de l'étude [3]. La longueur des chaînes et leur enchevêtrement limitent l'ordre cristallin, de même que toutes les irrégularités inévitables ayant lieu lors de la polymérisation : ramifications indésirables, défauts de tacticité, radicaux, etc. Les polymères cristallisables sont donc toujours semi-cristallins : ils présentent un mélange de phases amorphes et de phases cristallines. Par ailleurs, les cristaux des thermoplastiques semi-cristallins présentent de très nombreux défauts, c'est la raison pour laquelle on parle de *paracristaux* [130].

**Mécanismes de cristallisation**

L'énergie nécessaire à la cristallisation peut être apportée sous forme de chaleur : il faut chauffer le polymère à partir de l'état vitreux et amener le matériau à une température supérieure à sa température de cristallisation (263 °C pour la matrice PA66 du matériau de l'étude), ou bien le refroidir à partir de l'état liquide. Les cristaux se forment alors naturellement par nucléation autour de micro-défauts. On remarque que la fusion de la phase cristalline est bien une transformation thermodynamique (du premier ordre), qu'il ne faut pas confondre avec la température de dégradation du matériau.

L'autre façon d'apporter de l'énergie depuis le milieu extérieur est un travail mécanique. La cristallisation sous contrainte (également dénommée cristallisation induite par déformation) est un phénomène d'oriention et d'extension des chaînes polymériques sous l'action d'une force de traction. Les chaînes sous forme de pelotes statistiques amorphes peuvent donc s'aligner et s'organiser en structures micellines puis lamellaires (voir figure 1.4). La cristallisation sous contrainte présente la particularité d'être un phénomène beaucoup plus rapide que la cristallisation au repos présentée ci-dessus. Ce mécanisme peut être observé lors de la mise en forme (étirage-soufflage[138], cisaillement au seuil d'injection).

**La lamelle cristalline**

L'élément de base de la phase cristalline est la lamelle cristalline. Ces structures, d'une épaisseur avoisinant la centaine d'angströms, sont formées par le repliement périodique des chaînes polymériques sur elles-mêmes, à partir de germes actifs. Les chaînes voisines peuvent alors s'aggréger suivant le même schéma et participer à la formation de la lamelle. Les macromolécules repliées s'orientent généralement quasi-perpendiculairement à la surface des lamelles [130]. Les lamelles cristallines sont séparées par des molécules à l'état amorphe, et sont reliées entre elles par des molécules de liaison qui participent donc à deux lamelles (ou plus), comme schématisé sur la figure 1.5.

**Les sphérolites**

Lorsqu'on laisse refroidir un thermoplastique cristallisable à partir de l'état fondu, ce qui est le cas d'un polymère mis en forme par injection, les lamelles croissent et s'organisent de façon radiale pour former des superstructures cristallines plus ou moins sphériques, appelées sphérolites, selon le schéma présenté sur la figure 1.6. Ces sphérolites sont entourés de phase amorphe au stade initial de leur développement, puis croissent, peuvent coalescer, jusqu'à occuper tout l'espace disponible (si les

3. Les polyéthylènes de très haute densité font figure d'exception avec des taux de cristallinité pouvant dépasser les 90 %, ce qui s'explique par la grande simplicité de leur structure moléculaire.

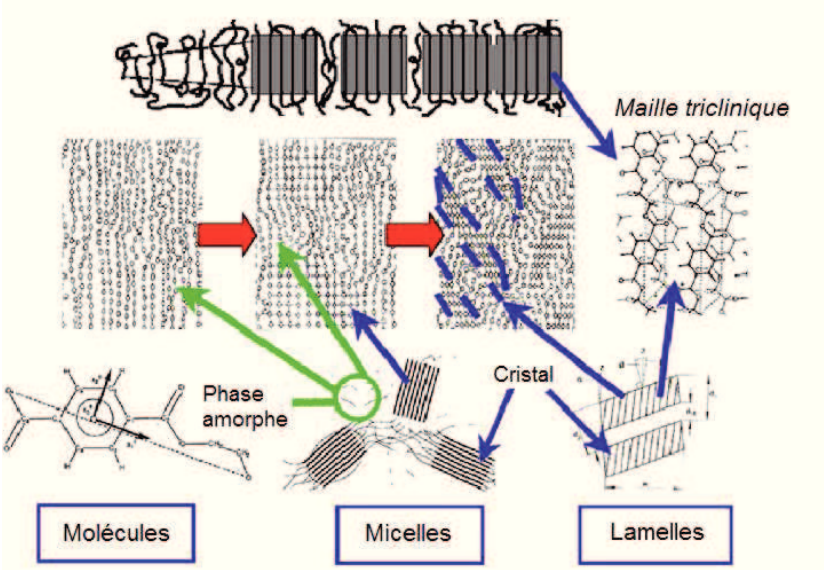



FIGURE 1.4 – Schéma des évolutions structurales du réseau polymérique lors d'une cristallisation induite par déformation dans le cas du P.E.T., d'après Marco [138].

conditions thermiques restent favorables) [4]. Leur taille (inférieure à un micron jusqu'à un millimètre), leur forme (plus ou moins aplatie) et leur orientation dépendent fortement des conditions de mise en forme (gradient thermique, vitesse d'injection, température du moule) [86].

En règle générale, pour les thermoplastiques semi-cristallins injectés, les sphérolites se développent dans la zone de cœur, mais évoluent vers des morphologies plus « aplaties » du type gerbes puis empilements lamellaires quand on se rapproche des parois du moule. Cependant, dans le cas des thermoplastiques chargés de fibres courtes, le cisaillement entre renforts homogénéise la cristallisation induite par l'injection.

## 1.2 Mécanismes physiques de déformation des thermoplastiques semi-cristallins

Le caractère multiphasique des semi-cristallins explique l'existence de différents micro-mécanismes physiques lors de la déformation macroscopique. Nous en présentons une revue rapide dans cette section, en mettant l'accent sur le caractère multi-échelles propre aux semi-cristallins. Nous nous appuyons ici essentiellement sur la revue de Bowden et Young [31] reprise et complétée par Lin et Argon [130]. De très nombreuses études expérimentales portent essentiellement sur le polyéthylène, dont l'architecture moléculaire très simple explique qu'il soit très facilement cristallisable, mais sont généralisables à l'ensemble des semi-cristallins.

### 1.2.1 Déformation des lamelles cristallines

La phase cristalline peut se déformer suivant des mécanismes analogues à ceux observés pour les métaux. Le réseau cristallin formé par les alignements de chaînes voisines peut subir des dislocations

4. Même dans ce cas, la présence de phase amorphe interlamellaire explique que le taux de cristallinité reste modéré.

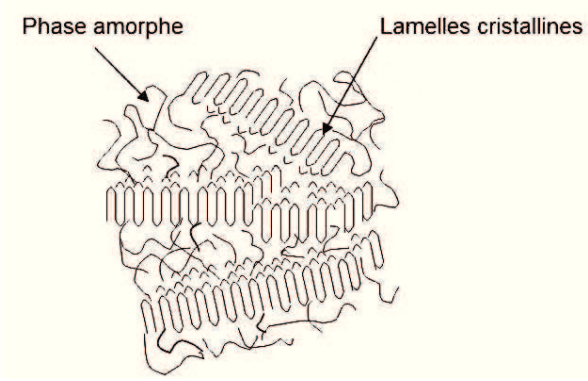



FIGURE 1.5 – Amas lamellaire (taille caractéristique : 10 nm), tiré de [160].

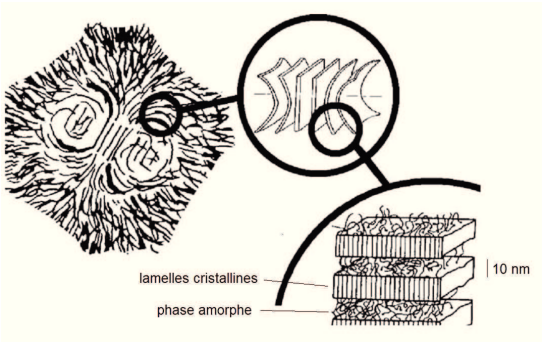



FIGURE 1.6 – Structure sphérolitique de type $\beta$ et sous-structure lamellaire, d'après Fond et G'sell [73].

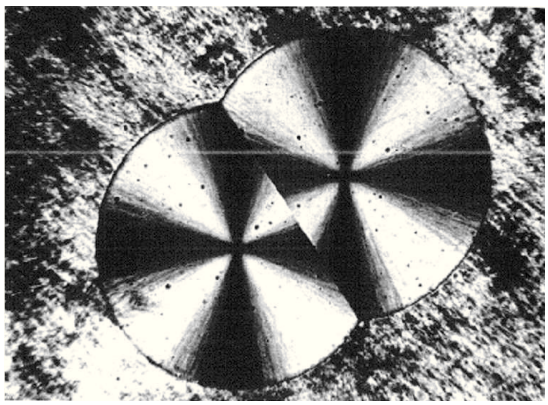


FIGURE 1.7 – Coalescence de deux sphérolites observée par microscopie par transmission en lumière polarisée (taille 150 nm), tiré de [79].

qui se traduisent par le glissement d'un plan cristallin par rapport à un autre. Ces glissements locaux se traduisent toujours par une rotation globale des cristaux dans la direction de plus grande élongation [31], comme illustré sur la figure 1.8.

G'sell et Haudin [79] utilisent les notions de plan critique et de cission résolue (classiques en plasticité cristalline) pour mettre en évidence les systèmes de glissement actifs et identifient le glissement suivant l'axe des chaînes comme étant prépondérant (dislocation vis). Des mécanismes de glissement transverse (dislocation coin) sont également observés pour des lamelles orientées dans la direction de sollicitation. Les plans de glissement contiennent nécessairement les directions des chaînes moléculaires en raison de la difficultés à rompre les liaisons covalentes : ces mécanismes de plasticité pseudo-cristalline font donc intervenir les liaisons hydrogènes ou Van der Walls inter-chaînes.

Les sites communément admis de nucléation des dislocations sont les extrémités des chaînes situées sur les faces des lamelles, même si en fonction de la température et de l'épaisseur des lamelles, des sites de nucléation locaux intra-lamellaires peuvent être mis en évidence pour les lamelles épaisses [8]. Les mouvements de dislocations sont thermiquement activés, comme pour les métaux, mais dans des proportions plus importantes, et présentent une sensibilité marquée à la pression hydrostatique

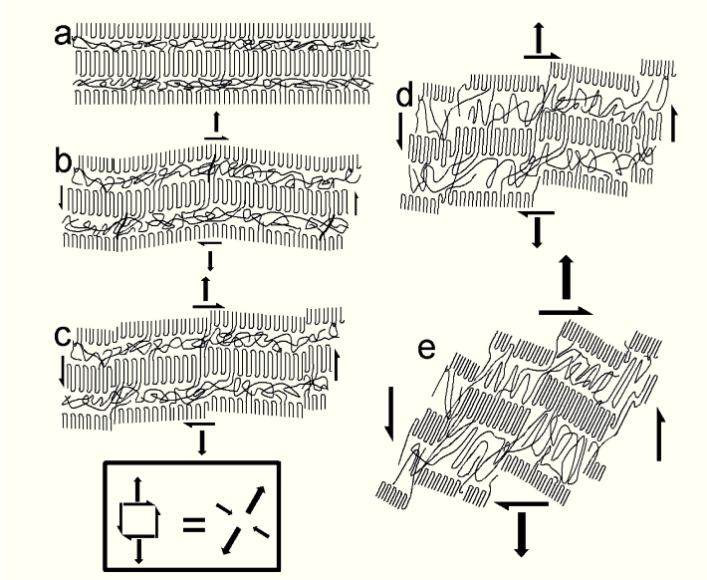



FIGURE 1.8 – Déformation lamellaire générée par glissement cristallin sous l'action d'efforts de traction-cisaillement d'intensité croissante, d'après Fond et G'sell [73]. On constate que la propagation de dislocations génère une rotation progressive des cristaux, et que des fragmentations lamellaires peuvent être la conséquence d'efforts importants.

[130]. Ainsi, on peut montrer qu'une augmentation de la température abaisse la contrainte de cission critique et augmente le taux de plastification ; par contre la pression hydrostatique réduit la contrainte effective activant le glissement, suivant une loi de type Coulomb. Enfin, la phase amorphe interlamellaire s'oppose aux mouvements des dislocations.

On peut également relever des transformations cristallines particulières, observées usuellement sur les métaux, comme le maclage (changement local d'orientation du cristal autour d'un plan de symétrie, appelé plan de macle, en présence de grandes déformations) ou encore comme les transformations martensitiques (changement de type de maille cristalline, sous l'effet d'une contrainte).

### 1.2.2 Déformation de la phase amorphe

La phase amorphe, qu'elle soit interlamellaire ou bien autour de structures cristallines (sphérolites ou amas lamellaires), peut être soumise à des efforts de cisaillement, à des élongations lors de séparation inter-lamellaire ou encore à des déformations engendrées par les rotations de piles de lamelles. Ces mécanismes sont résumés sur la figure 1.9.

Notons que la séparation interlamellaire peut être rendue difficile si la pression hydrostatique est élevée, ce qui génère des mécanismes d'endommagement par cavitation [73]. C'est le cas dès que le confinement physique imposé par les lamelles se conjugue à un aspect faiblement compressible de la phase amorphe. En outre, les rotations d'ensemble des lamelles supposent que la phase amorphe avoisinante admette de grandes déformations. Ceci explique pourquoi le mécanisme prépondérant de déformation de la phase amorphe reste le cisaillement interlamellaire. Par ailleurs, contrairement à la phase cristalline, les déformations de la phase amorphe (tant qu'elles restent modérées) sont essentiellement réversibles [130].

Concernant la phase amorphe interlamellaire, essentielle pour les semi-cristallins, nous pouvons distinguer la phase amorphe « liée » et la phase amorphe « libre ». La phase amorphe liée, située au voisinage immédiat de la phase cristalline [73], est susceptible de présenter un arrangement assez régulier. Bartczak et Galeski [15] mettent ainsi en évidence avec des observations par diffraction de rayons X aux larges angles (WAXS) des aggrégats de chaînes polymériques de la phase amorphe sous forme de quasi-réseau hexagonal, subissant les mêmes mécanismes de glissement que la phase cristalline. En revanche, la phase amorphe libre, au centre des interstices interlamellaires, possède des propriétés mécaniques bien plus proches de celles d'un amorphe en masse.

Nous avons noté que la phase amorphe peut également accommoder les rotations d'ensemble subies par des blocs lamellaires. Ces rotations, mises en évidence par des observations de diffraction par rayons X, se produisent quand les mécanismes de glissement cristallins nécessitent un effort supérieur à celui requis pour déformer le réseau amorphe [130]. Ce cas de figure se présente notamment au-dessus de la température de transition vitreuse, quand le caractère caoutchoutique de la phase amorphe induit une raideur assez faible.

Enfin, la phase amorphe peut également s'endommager lorsqu'elle subit des déformations trop importantes. Le phénomène de craquelure (*crazing* en anglais) consiste en l'apparition de petites fissures perpendiculaires à l'axe de traction. Les lèvres de la fissure sont reliées par des fibrilles [5] qui reprennent les efforts de traction, et ont donc subi des transformations irréversibles. Dans le cas d'un semi-cristallin, les lamelles cristallines gênent la propagation des craquelures.

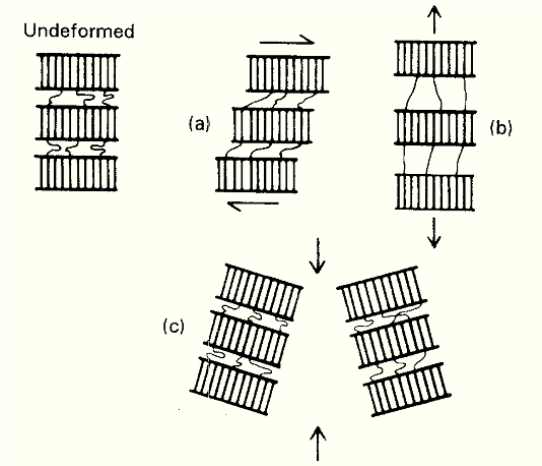



FIGURE 1.9 – Modes de déformation de la phase amorphe [130] :
(a) glissement interlamellaire sous l'effet d'un cisaillement, (b) élongation lors de séparation interlamellaire, (c) accommodation de la rotation d'ensemble des cristaux.

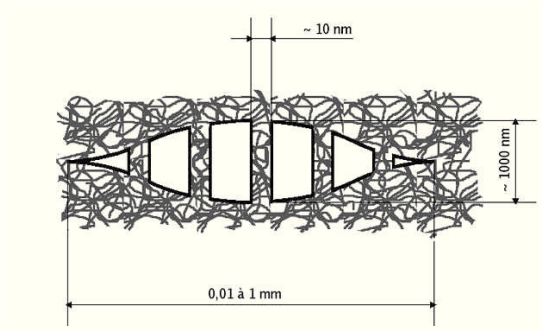



FIGURE 1.10 – Schéma d'une craquelure dans un polymère amorphe vitreux d'après Détrez [57] et G'sell et Haudin [79].

5. Les fibrilles sont des ensembles de macromolécules du réseau amorphe, étirées dans le sens de la sollicitation et donc hors de leur conformation de pelote statistique initiale. Elles peuvent présenter un renforcement mécanique suite à cette réorganisation [57].

### 1.2.3 Déformation des sphérolites

A l'échelle des sphérolites, les modes de déformation évoqués ci-dessus se traduisent par un mécanismes plus global d'aplatissement comme présenté sur la figure 1.11. Cet aplatissement peut être homogène et réversible ou bien localisé dans des zones particulières, et alors souvent irréversible [130].
Dans le premier cas, qui n'est valable qu'aux faibles contraintes, il faut comprendre que seule la phase amorphe se déforme, par cisaillement interlamellaire voire par accompagnement de mouvement d'ensemble des blocs lamellaires. Dans le second cas, les mécanismes de déformation se font aussi bien dans la phase amorphe interlamellaire que dans la phase cristalline. On distingue alors plusieurs zones dans le sphérolite :

- les zones polaires, où les lamelles sont orientées dans une direction proche de l'axe de traction, sont les premières sollicitées. On y observe une fragmentation des cristaux ainsi qu'un basculement global des cristaux dans la direction de traction ;
- les zones équatoriales présentent une séparation interlamellaire accommodée par la phase amorphe qui est soumise localement à de fortes déformations, ainsi que de possibles glissements transverses dans la phase cristalline ;
- les zones diagonales sont le siège de mécanismes de cisaillement qui provoquent à la fois des glissements cristallins le long de l'axe des chaînes ainsi qu'un cisaillement de la phase amorphe liée. Ces glissements locaux se traduisent par un alignement progressif des lamelles dans la direction de traction.

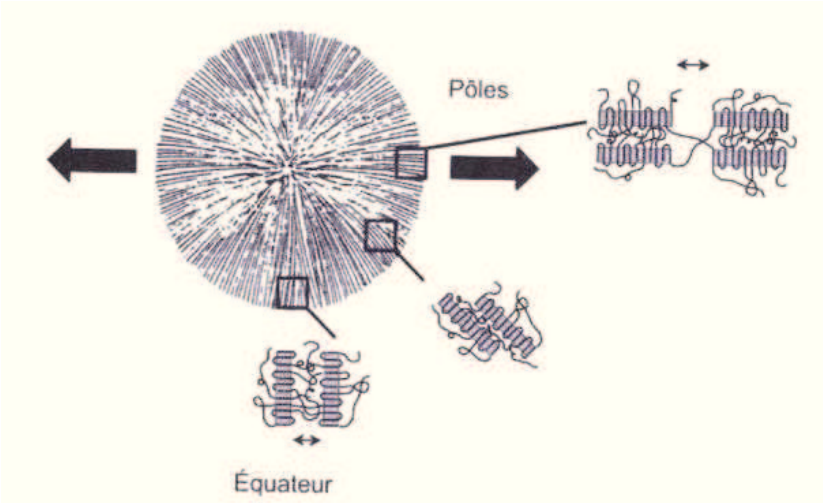



FIGURE 1.11 – Modes de déformation suivant la position au sein du sphérolite, d'après Etienne et David [70]

### 1.2.4 Influence des conditions environnementales : cas particulier des polyamides

Nous avons déjà évoqué l'influence de la température sur les modes de déformation des thermoplastiques, amorphes ou semi-cristallins. Nous n'y reviendrons donc pas. Par contre, nous nous intéressons ici à l'influence de l'humidité, ainsi qu'à l'histoire du matériau (vieillissement thermique ou hygrothermique) sur les propriétés physiques et mécaniques des polymères. La multiplicité des

mécanismes physico-chimiques en jeu explique que nous nous restreignions essentiellement au cas particulier des polyamides.

### a Influence de l'humidité

Les polyamides possèdent des fonctions amides le long de leurs chaînes carbonées. Le caractère fortement hydrophile de ces dernières explique la sensibilité marquée des polyamides à l'humidité, qui peuvent absorber plusieurs pourcents d'eau en masse lorsqu'ils sont exposés à un milieu humide.

Les molécules d'eau insérées dans le réseau macromoléculaire viennent remplacer des liaisons hydrogènes, en particuliers celles qui se forment entre les groupes NH d'une chaîne et CO d'une autre chaîne, ou bien entre les groupes carbonyles CO de deux chaînes [195] (voir figure 1.12). La cohésion mécanique du réseau est ainsi altérée, ce qui se traduit par une évolution vers un comportement de type plastique : augmentation de l'allongement à rupture, diminution de la contrainte maximale ainsi que de la limite apparente d'élasticité, comme l'illustre le tableau 1.1. La présence d'eau se manifeste également sur la température de transition vitreuse, qui diminue avec le taux d'humidité, comme présenté sur la figure 1.13. Ces conséquences mécaniques seront détaillées dans le cas du matériau de l'étude au chapitre 4.

Remarquons qu'il est également possible de sécher le matériau qui présente une teneur initiale en eau ; cette opération, si elle n'entraîne pas de vieillissement thermique (voir ci-dessous), permet de retrouver les caractéristiques d'un matériau sec.

| Grandeur physique | matériau sec | matériau humide | Unité |
|---|---|---|---|
| Module d'Young | 3063 | 1987 | MPa |
| Seuil élastique | 82 | 53 | MPa |
| Allongement à rupture | 25 | >50 | % |
| Ténacité | 5.5 | 15 | $kJ/m^2$ |

TABLE 1.1 – Caractéristiques mécaniques générales du PA66 en fonction du taux d'humidité ambiant (sec ou à l'équilibre avec un taux d'humidité de 50 %), à 23 °C. La ténacité est évaluée selon un test de Charpy sur éprouvette entaillée (source DuPont™).

### b Vieillissement

Le vieillissement est un mécanisme de dégradation qui se définit par l'altération des propriétés physico-chimiques (et donc mécaniques) d'un polymère. Nous distinguons plusieurs types de vieillissement. Tout d'abord, le vieillissement physique [194], qui n'entraîne pas d'altérations des macromolécules, peut se manifester par une post-cristallisation à haute température, ou encore une absorption/désorption d'adjuvants. Le vieillissement chimique [196–198] correspond à des coupures de chaînes macromoléculaires. On parlera, en fonction de la nature de l'agression subie par le polymère, de vieillissement thermochimique, photochimique, radiochimique, etc.

**Vieillissement thermo-oxydatif**

Le vieillissement thermique se produit pour des polymères exposés à l'air et est activé par la température (le plus souvent selon un mécanisme arrhénien). Le mode de vieillissement le plus courant pour les applications automobiles est la thermo-oxydation, conséquence de la réaction des molécules d'oxygène avec le réseau macromoléculaire amorphe, perméable [78]. On peut ainsi observer des

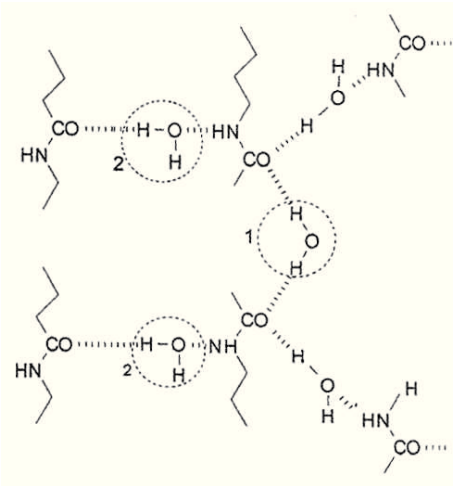



FIGURE 1.12 – Absorption d'eau par le réseau macromoléculaire d'un polyamide, selon le mécanisme proposé par Puffr et Šebenda [172].

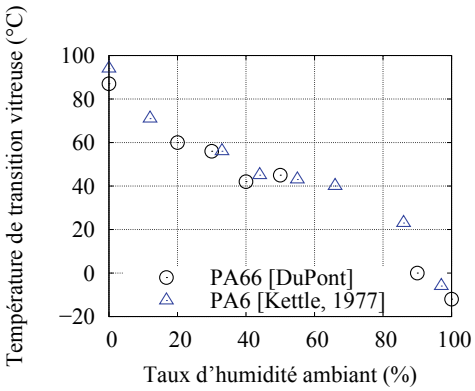



FIGURE 1.13 – Influence du taux d'humidité ambiant sur $T_g$ pour un polyamide 6 [109] et pour un polyamide 66 (source DuPont™).

coupures de chaînes qui se traduisent par une chute de la masse molaire et entraînent une légère diminution de la température de transition vitreuse, ainsi qu'une chute de l'allongement à rupture. Par contre, l'augmentation du nombre de points de réticulation, ainsi que la cristallisation plus aisée (chaînes plus courtes) expliquent l'augmentation initiale de la raideur du matériau, avant qu'elle ne chute à son tour lorsque les durées de vieillissement deviennent trop importantes [181].

Lyons [131] a étudié l'évolution des propriétés mécaniques de plusieurs matériaux avec le vieillissement thermique, dont un polyamide 66 chargé en fibres de verre à 33 % (fabriqué par DuPont™) proche du matériau de notre étude. Il montre qu'en fonction des propriétés mécaniques étudiées, le vieillissement se produit dès 100 ou 150 °C.

**Vieillissement hygrothermique**

Le vieillissement hygrothermique est un autre type de vieillissement chimique, lié à l'interaction des molécules d'eau avec le réseau macromoléculaire amorphe. Il est lui aussi activé thermiquement. Nous distinguons le vieillissement hygrothermique, irréversible car lié à des coupures de chaînes macromoléculaires par hydrolyse, de la simple absorption et diffusion des molécules d'eau évoquée précédemment. Dans le cas des composites, le vieillissement hygrothermique se manifeste également par la dégradation des propriétés interfaciales entre les fibres et la matrice [22] voire par une décohésion interfaciale [74].

La scission des chaînes par hydrolyse entraîne une diminution de la masse molaire, et a donc des conséquences semblables à la thermo-oxydation : cristallisation facilitée, diminution de l'allongement à rupture, diminution de la raideur, de la contrainte à rupture [74].

### 1.2.5 Modélisation du comportement de la matrice polyamide 66

Nous avons décrit quels sont les modes principaux de déformation des polymères semi-cristallins. La matrice thermoplastique du composite que nous étudions peut donc subir tout un panel de déformations microstructurales au cours d'un chargement mécanique. Certains de ces mécanismes sont irréversibles à l'échelle locale (plasticité cristalline), et peuvent donc potentiellement entraîner des

déformations résiduelles à l'échelle de la structure macroscopique. Les mécanismes de reptation ou de changement conformationnel des chaînes de la phase amorphe [6], qui font intervenir des ruptures de liaisons intermoléculaires (liaisons faibles), s'apparentent davantage à des phénomènes visqueux, partiellement ou totalement réversibles. En effet, s'ils présentent des temps de réponse liés à la fréquence de passage d'un état énergétique à l'autre, le retour à l'état non contraint après application d'une sollicitation laisse penser que le réseau macromoléculaire continue de se réorganiser pour retrouver un état énergétique minimal. Enfin, des mécanismes d'endommagement (cavitation de la phase amorphe interlamellaire, crazing, fragmentation lamellaire) à l'échelle locale sont susceptibles d'altérer les propriétés mécaniques macroscopiques.

Par ailleurs, nous avons pu constater l'importance de la température sur la phase amorphe (transition vitreuse entre comportement vitreux ou caoutchoutique) aussi bien que sur la phase cristalline (cristallisation ou fusion, activation de la plasticité). Nous avons également évoqué le rôle important joué par la teneur en humidité sur les caractéristiques de la réponse mécanique dans le cas des polyamides. Nous pouvons donc anticiper la forte dépendance du comportement mécanique de la matrice polyamide 66 à l'environnement thermique et hygrométrique.

Au bilan, l'étude de la réponse mécanique d'un thermoplastique semi-cristallin tel que le PA66 est un problème complexe qui fait l'objet de différentes démarches dans la littérature. Une première option consiste en une approche multi-échelle (échelles moléculaire, macromoléculaire, supramoléculaire) prenant en compte le caractère multiphasique du thermoplastique, les orientations privilégiées de la phase amorphe ou de la phase cristalline, leurs interfaces, etc. Au vu de la complexité d'un tel problème, une description complète de tous les mécanismes physique est utopique [73]. Néanmoins, certains auteurs ont développé des modèles décrivant au mieux la micromécanique et la morphologie des thermoplastiques semi-cristallins, souvent à l'aide d'approches par homogénéisation plus ou moins détaillées (voir la section 1.3.1) [160, 185, 193]. La complexité de ces modèles suppose une bonne connaissance de la microstructure du matériau, mais ils sont réduits à des domaines de température limités car nous savons que la microstructure et les micromécanismes physiques évoluent fortement avec la température.

Ces difficutés expliquent que de nombreux auteurs préfèrent travailler à une échelle supérieure en considérant le matériau comme homogène macroscopiquement [28], quitte à introduire des variables d'état telles que la fraction cristalline [138, 174], ou encore à considérer deux comportements distincts pour la phase cristalline et la phase amorphe [57, 160].

Dans notre cas, la matrice est renforcée par des fibres de verre courtes, dont les propriétés mécaniques sont très différentes de celles de la matrice thermoplastique. Il est alors d'usage de considérer dans ce cas la matrice comme une phase unique [28, 160]. Les micro-mécanismes de déformation que nous avons passés en revue ne sont alors pas modélisés de façon individuelle, mais servent plutôt de justification physique à des lois de comportement homogénéisées à l'échelle de la matrice. Différentes possibilités de modélisation seront abordées dans la section 1.3.2.

6. Les transformations isomériques conformationnelles, c'est-à-dire les rotations autour de liaisons covalentes simples, peuvent permettre des déplacements relatifs – coopératifs – des chaînes macromoléculaires les unes par rapports aux autres.

## 1.3 Modélisation du comportement des thermoplastiques renforcés

### 1.3.1 Approches micromécaniques

Le matériau de l'étude est un composite biphasique constitué d'une matrice thermoplastique en PA66 [7] renforcée par des fibres de verre courtes. La matrice présente un comportement fortement non-linéaire, tandis que les fibres de verre peuvent être considérées comme parfaitement élastiques.
Dans cette section, nous allons exposer les méthodes et les outils mathématiques permettant de construire à partir de la connaissance de la microstructure la réponse mécanique du matériau hétérogène à un chargement extérieur macroscopique.

Les méthodes de changement d'échelle pour l'étude du comportement des matériaux hétérogènes reposent toutes sur la notion de VER (Volume Élémentaire Représentatif) : il existe une échelle, dite mésoscopique, petite devant l'échelle macroscopique (de la structure) mais suffisamment grande devant la texture hétérogène du matériau étudié pour que l'on puisse considérer que la réponse mécanique du VER est représentative de la réponse du matériau *homogénéisé*. L'homogénéisation consiste donc à résoudre le problème suivant : connaissant une texture représentative du matériau hétérogène (biphasé dans notre cas : matrice thermoplastique et fibres courtes), et connaissant le comportement de chacune des phases, quelle est la loi de comportement du matériau homogène équivalent ? Nous allons tenter de présenter rapidement les méthodes permettant de répondre à cette question. Nous suivons les notations de Bornert et al. [29].

#### a Homogénéisation dans le cadre élastique

Les problèmes d'homogénéisation font appel au concept de localisation des déformations. Connaissant le chargement macroscopique en déformation imposée $\underline{\underline{E}}$ appliqué à un VER, il faut trouver la déformation moyenne dans chaque phase $i$ du VER :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}_i \equiv \frac{1}{V_i} \int_{\text{phase } i} \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x})\, \mathrm{d}\underline{x} = \mathbb{A}^i : \underline{\underline{E}} \tag{1.1}$$

où $V_i$ est le volume occupé par la phase $i$. Le problème étant linéaire, le principe de superposition fait apparaître le tenseur de localisation $\mathbb{A}^i$ dans la phase $i$, qui permet de résoudre le problème d'homogénéisation puisque l'on peut montrer [29] que :

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \tilde{\mathbb{C}} : \underline{\underline{E}} \quad \text{avec} \quad \tilde{\mathbb{C}} = \sum_{\text{phases } i} f_i\, \mathbb{C}^i : \mathbb{A}^i \equiv \langle \mathbb{C} : \mathbb{A} \rangle \tag{1.2}$$

$f_i$ représente la fraction volumique de la phase $i$ et l'opérateur $\langle . \rangle$ la moyenne par phase. Le tenseur $\tilde{\mathbb{C}}$ est le tenseur d'élasticité homogénéisé du matériau hétérogène, tandis que les tenseurs $\mathbb{C}^i$ sont les tenseurs élastiques de chaque phase. La résolution du problème d'homogénéisation équivaut ainsi à la détermination des tenseurs de localisation [8].

**Le problème de l'inclusion équivalente d'Eshelby et le modèle haute-dilution**

Eshelby [69] s'est intéressé au problème suivant : soit une matrice infinie, élastique, présentant une déformation libre [9] (déformation thermique par exemple) nulle partout sauf dans un domaine

7. Dans la section précédente, nous avons montré que la matrice est elle-même multiphasique en toute rigueur (phases amorphe et cristalline), nous faisons ici l'hypothèse de la considérer homogène.

8. Une approche similaire en contrainte imposée est tout à fait possible : on parlera alors de tenseurs de concentration des contraintes.

9. La déformation « libre » est la déformation que présenterait l'inclusion à l'état libre, c'est-à-dire en l'absence de la réaction induite par la matrice extérieure.

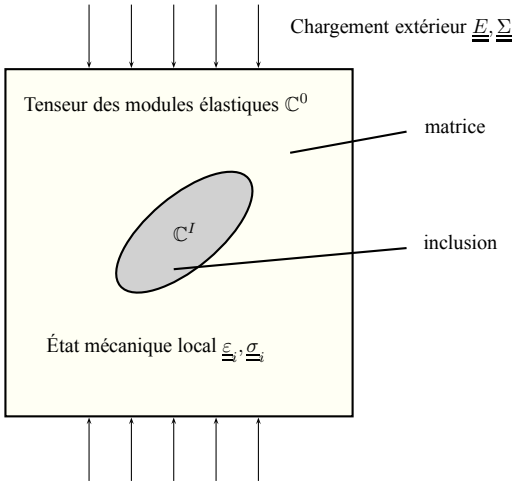



FIGURE 1.14 – Problème de l'inclusion hétérogène dans une matrice infinie soumise à un chargement (phases 0 pour la matrice, $I$ pour les inclusions).

ellipsoïdal appelé inclusion, notée $I$, où elle est supposée homogène, égale à $\underline{\underline{\varepsilon}}_L$. Il a montré que la déformation totale finale (résultant de l'interaction avec ) dans l'inclusion est également homogène, et vaut $\underline{\underline{\varepsilon}}_I = \mathbb{E}^{I,0} : \underline{\underline{\varepsilon}}_L$. Le tenseur $\mathbb{E}^{I,0}$ est appelé tenseur d'Eshelby, et ne dépend que des modules de la matrice et de la forme de l'inclusion, selon des expressions analytiques.

A partir de ce résultat sont construits tous les modèles d'homogénéisation. Le problème de l'inclusion hétérogène présenté sur la figure 1.14 utilise directement ce résultat :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}_I = \left(\mathbb{C}^* + \mathbb{C}^I\right)^{-1} : \left(\mathbb{C}^* + \mathbb{C}^0\right) : \underline{\underline{E}} \tag{1.3}$$

où $\mathbb{C}^* = \mathbb{C}^0 : \left(\left(\mathbb{E}^{I,0}\right)^{-1} - \mathbb{I}\right)$ est le tenseur d'influence de Hill, qui décrit la réaction de la matrice infinie sur l'inclusion. Ce résultat peut se généraliser au cas d'un composite comportant une faible fraction de renforts, et où chaque fibre peut être considérée isolée. On peut alors écrire le tenseur de localisation dans les inclusions :

$$\mathbb{A}^I = \left(\mathbb{C}^* + \mathbb{C}^I\right)^{-1} : \left(\mathbb{C}^* + \mathbb{C}^0\right) \tag{1.4}$$

Il est possible de construire la loi de comportement homogénéisée de ce composite, relation entre les contraintes et les déformations macroscospiques (appliquées aux limites du VER). C'est le modèle *haute dilution*, valable dans les cas où la fraction massique d'inclusions $f_I$ n'excède pas quelques pourcents [29] :

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \left[\mathbb{C}^0 + f_I\left(\mathbb{C}^I - \mathbb{C}^0\right) : \mathbb{A}^I\right] : \underline{\underline{E}} \tag{1.5}$$

d'après l'équation 1.2. On définit maintenant le tenseur $\mathbb{T}^{I,0} = \left(\mathbb{C}^I - \mathbb{C}^0\right) : \mathbb{A}^I$ pour obtenir la formulation concise du tenseur d'élasticité homogénéisé du modèle haute dilution :

$$\mathbb{C}^{HD} = \mathbb{C}^0 + f_I \mathbb{T}^{I,0} \tag{1.6}$$

**Les modèles avec prise en compte des interactions entre particules**

Aux fractions volumiques $f_I$ plus élevées, il est nécessaire de prendre en compte les interactions entre particules de renforts, du moins au premier ordre. Les renforts sont ainsi supposés être soumis à un *champ effectif moyen*, résultant du chargement macroscopique et des effets d'interaction.

Ponte Castañeda et Willis [171] ont montré que si les centres des particules sont distribués de façon isotrope, alors il est possible d'écrire la relation entre contrainte et déformation macroscopiques sous la forme :

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \left[\mathbb{C}^0 + \left[\left(f_I\left(\mathbb{C}^I - \mathbb{C}^0\right) : \left(\mathbb{C}^* + \mathbb{C}^I\right)^{-1} : \mathbb{C}^0 : \left(\mathbb{E}^{I,0}\right)^{-1}\right)^{-1} - \mathbb{E}^{d,0} : \left(\mathbb{C}^0\right)^{-1}\right]^{-1}\right] : \underline{\underline{E}}$$

ce qui amène à l'expression du tenseur des modules élastiques homogénéisé :

$$\mathbb{C}^{PCW} = \mathbb{C}^0 + \left[\left(f_I \mathbb{T}^{I,0}\right)^{-1} - \mathbb{E}^{d,0} : \left(\mathbb{C}^0\right)^{-1}\right]^{-1} \tag{1.7}$$

où $\mathbb{E}^{d,0}$ est le tenseur d'Eshelby associé à une particule sphérique. L'utilisation de ce tenseur ne présuppose pas que la forme des inclusions soit sphérique, il faut juste que la distribution de leur centre soit isotrope. La forme des inclusions, ainsi que leur raideur, influent elles uniquement sur le tenseur $\mathbb{T}^{I,0}$.

Si l'on fait maintenant l'hypothèse que les renforts sont sphériques, on aboutit au modèle de Mori et Tanaka [146]. La formule précédente se simplifie alors, puisque le tenseur d'Eshelby associé à la forme des particules, qui intervient dans l'expression de $\mathbb{T}^{I,0}$, s'identifie avec le tenseur d'Eshelby associé à leur distribution $\mathbb{E}^{d,0}$. On aboutit dans ce cas à la formulation suivante, remarquablement élégante, du tenseur d'élasticité effectif :

$$\left(\mathbb{C}^{MT} + \mathbb{C}^*\right)^{-1} = f_I\left(\mathbb{C}^I + \mathbb{C}^*\right)^{-1} + f_0\left(\mathbb{C}^0 + \mathbb{C}^*\right)^{-1} = \left\langle\left(\mathbb{C}^i + \mathbb{C}^*\right)^{-1}\right\rangle \tag{1.8}$$

Le caractère simplifié de la prise en compte des particules dans ces modèles (Ponte-Castañeda-Willis en général ou Mori-Tanaka en particulier [10]) fait qu'ils ne sont valables que pour des fractions volumiques en fibres modérées, typiquement inférieures à 25 % environ. Par ailleurs, les valeurs des tenseurs d'Eshelby pour des ellipsoïdes quelconques se calculent numériquement ou analytiquement dans les cas les plus simples (Tandon et Weng [188] les ont par exemple calculés dans le cas d'inclusions sphéroïdales dans une matrice élastique isotrope). Il convient enfin de remarquer que les méthodes d'homogénéisation ne permettent que d'avoir accès aux déformations moyennes dans chaque phase. Il est néanmoins possible de quantifier les variations intraphasiques autour de ces valeurs moyennes, à l'aide d'estimations numériques des dérivées du module effectif en fonction des modules des constituants [29].

On peut montrer que dans le cas d'inclusions plus raides que la matrice (c'est le cas des matériaux renforcés), l'estimation PCW correspond à une borne inférieure du tenseur élastique effectif et s'identifie avec la borne inférieure de Hashin et Shtrikman [29, 85]. Même pour des fractions volumiques plus élevées, ce modèle peut donc servir d'estimateur du comportement homogénéisé. Pour des particules sphériques distribuées de façon isotrope, Benveniste [20] a proposé une interprétation physique du modèle de Mori-Tanaka : chaque particule se comporte comme si elle était isolée dans une matrice infinie, qui subit à l'infini la déformation effective moyenne de la matrice (et non le chargement macroscopique, à la différence du modèle haute dilution).

10. On écrira PCW et MT pour alléger les notations.

Par ailleurs, pour des composites renforcés avec des fibres courtes, de nombreux auteurs s'inspirent de cette interprétation physique et utilisent le modèle de Mori-Tanaka (valable pour des particules sphériques) avec un tenseur d'Eshelby calculé pour des particules non sphériques [41, 64, 166, 188]. Dans ce cas, les propriétés dérivées du modèle de PCW ne s'appliquent plus (caractère de borne notamment). Tandon et Weng [188] ont travaillé sur un composite constitué d'une matrice élastique isotrope renforcée de fibres courtes unidirectionnellement alignées, modélisées par des sphéroïdes et distribuées de façon isotrope. Le composite résultant est globalement isotrope transverse, et les auteurs ont proposé une expression analytique des cinq modules d'élasticité homogénéisés [11].

Le modèle auto-cohérent (noté SC pour *self-consistent*) est un autre modèle d'homogénéisation. Introduit initialement par Hill [91], il suppose que chaque inclusion est isolée dans un milieu infini dont les propriétés sont celles du composite recherché. Un tel modèle amène donc à la résolution de l'équation implicite suivante :

$$\left(\mathbb{C}^{SC} + \mathbb{C}^{*}\right)^{-1} = \langle \mathbb{C} + \mathbb{C}^{*} \rangle^{-1} \tag{1.9}$$

où le tenseur d'influence de Hill $\mathbb{C}^{*} = \mathbb{C}^{SC} : \left(\left(\mathbb{E}^{I,SC}\right)^{-1} - \mathbb{I}\right)$ dépend du comportement effectif. Cette équation est généralement résolue de manière itérative pour trouver $\mathbb{C}^{SC}$. Ce modèle est particulièrement adapté à la description des matériaux polycristallins, puisqu'il ne suppose pas qu'une phase joue le rôle de matrice et une autre celui d'inclusion : toutes ont un rôle symétrique. Néanmoins, Chou et al. [42] ont repris ce modèle pour l'application aux composites renforcés en fibres courtes alignées.

D'autres modèles d'homogénéisation sont adaptés aux fractions d'inclusions plus élevées. Par exemple, Lielens et al. [129] proposent de considérer un modèle de Mori-Tanaka où les fibres et la matrice sont inversées, de façon à obtenir une estimation de la borne supérieure du composite, et ensuite d'interpoler le comportement effectif en pondérant les deux modèles de Mori-Tanaka (« classique » et « inversé ») en fonction de la fraction volumique de fibres. Le modèle de double inclusion (également appelé auto-cohérent généralisé, ou modèle 3 phases) proposé par Christensen et Lo (1979), repris par [149], suppose quant à lui que chaque inclusion se comporte comme si elle était insérée dans un premier volume de matrice (dont la forme est identique à celle de l'inclusion, mais de volume plus important, le rapport des volumes étant égal au rapport des fractions volumiques $f_0/f_I$), le tout étant plongé dans une matrice infinie dont le comportement est celui du composite. Doghri et Ouaar [59] ont montré que ce modèle est plus précis que celui de Mori-Tanaka quand la fraction volumique d'inclusions augmente.

On pourra se rapporter à la revue faite par Tucker III et Liang [192] pour un aperçu des différentes méthodes d'homogénéisation applicables aux composites à fibres courtes alignées, ainsi que leur comparaison avec d'autres approches (simulation numérique du VER, équations analytiques dans des cas simplifiés, estimations par les bornes issues des principes variationnels).

**Prise en compte de l'orientation des fibres**

Les méthodes évoquées précédemment s'appliquent uniquement dans le cas où toutes les fibres sont identiques ; elles sont notamment supposées avoir la même orientation. Or, la mise en forme par injection résulte en une distribution d'orientation des fibres de verre. Deux approches sont alors possibles pour prendre en compte cette orientation des fibres dans la procédure d'homogénéisation.

La première méthode consiste à considérer $N$ familles d'orientations, qui sont autant de phases

11. En isotropie transverse, on peut montrer que seuls cinq coefficients sont indépendants dans l'écriture du tenseur d'élasticité.

distinctes, et dont la somme des fractions volumiques est égale à la fraction de fibres. Il est alors possible de calculer le comportement effectif suivant un schéma de Mori-Tanaka (par exemple) sur $N$ phases fibres et une phase matrice, suivant une généralisation de l'équation 1.8. Cependant, cette méthode présente l'inconvénient de ne pas systématiquement aboutir à un tenseur effectif symétrique (notamment dans le cas d'un comportement non-isotrope des constituants) [21, 179].

La seconde approche a été tout d'abord proposée par Advani et Tucker III [1], puis formalisée par Camacho et al. [34], avant d'être souvent reprise dans la littérature [60, 63, 129, 145, 167]. Elle consiste en une procédure d'homogénéisation en deux étapes, comme schématisé sur la figure 1.15. Un composite unidirectionnel est calculé, suivant un des schémas évoqués ci-dessus (Mori-Tanaka en règle générale). Les propriétés macroscopiques sont ensuite pondérées par la distribution d'orientation ; il est ainsi possible de calculer une moyenne sur le tenseur des modules élastiques $\mathbb{C}^{\mathrm{UD}}$ en fonction de l'orientation, ou bien une moyenne sur le tenseur des souplesses $\mathbb{S}^{\mathrm{UD}}$, voire sur le tenseur des localisations $\mathbb{A}_f^{\mathrm{UD}}$ [63, 145]. La littérature retient néanmoins le plus souvent l'idée d'une moyenne sur les raideurs, ce qui s'apparente à l'emploi d'une borne de Voigt pour la deuxième étape. Formellement, il s'agit donc de calculer la quantité :

$$\tilde{\mathbb{C}} = \int_{\Omega} \mathbb{C}^{\mathrm{UD}}(\theta,\ \phi)\ \psi(\theta,\ \phi)\ \mathrm{d}\omega \tag{1.10}$$

Cette expression n'est pas facile à utiliser directement car elle suppose la connaissance complète de la fonction de distribution d'orientation des fibres $\psi$. Mis à part des cas particuliers de distributions théoriques (isotrope ou isotrope transverse par exemple), on préfèrera suivre la méthode proposée par Advani et Tucker III [1] que nous exposerons plus en détail dans le chapitre 5.

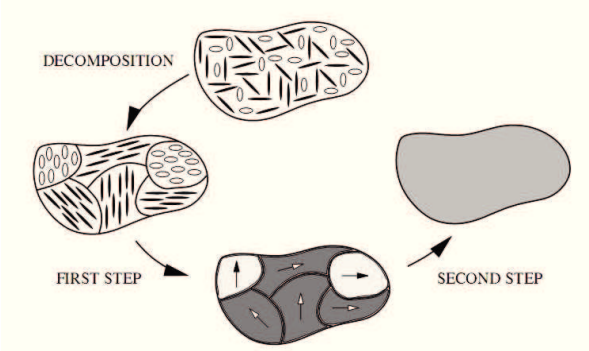



FIGURE 1.15 – Schéma d'homogénéisation en deux étapes d'après Doghri et Tinel [60].

### b Extension au cas viscoélastique linéaire

L'homogénéisation dans le cadre viscoélastique suppose l'utilisation du principe de correspondance viscoélastique [126, 166]. En effet, une loi viscoélastique linéaire s'exprime dans le cas général par une relation de convolution entre le tenseur des contraintes et l'histoire des déformations sous la forme :

$$\underline{\underline{\sigma}}(t) = \mathbb{G}(t) : \underline{\underline{\varepsilon}}(t=0) + \int_0^t \mathbb{G}(t-\tau) : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}(\tau)\ \mathrm{d}t \tag{1.11}$$

L'application de la transformée de Laplace-Carson (LC) définie par :

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : f &\rightarrow \mathcal{F}(f) = f^* \\ \text{avec} \quad f^* : p &\rightarrow f^*(p) = p \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-pt} \, \mathrm{d}t \end{aligned}$$

permet de transformer le produit de convolution en un simple produit doublement contracté. L'équation 1.11 s'écrit alors dans l'espace de LC : $\underline{\underline{\sigma}}^*(p) = \mathbb{G}^*(p) : \underline{\underline{\varepsilon}}^*(p)$. Nous reconnaissons une équation semblable à celles traitées dans le cadre élastique. L'homogénéisation se fait alors dans l'espace de LC selon les méthodes évoquées précédemment (en utilisant une loi viscoélastique phase par phase), puis le retour dans l'espace temporel s'effectue par inversion de la transformée de LC (par exemple en utilisant une décomposition en série de Prony). On obtient alors un tenseur de relaxation homogénéisé entre les contraintes et déformations macroscopiques et la loi de comportement sur le VER viscoélastique s'écrit :

$$\underline{\underline{\Sigma}}(t) = \tilde{\mathbb{G}}(t) : \underline{\underline{E}}(t = 0) + \int_0^t \tilde{\mathbb{G}}(t - \tau) : \dot{\underline{\underline{E}}}(\tau) \, \mathrm{d}t \tag{1.12}$$

### c Cas des comportements non-linéaires

L'homogénéisation dans le cadre de comportements non-linéaires (matrice élastoplastique ou viscoplastique) fait l'objet de travaux de recherche très récents. Nous nous contentons ici de brosser un tableau rapide des méthodes utilisées, sans rentrer dans les détails mathématiques parfois complexes.

Plusieurs méthodes sont envisageables. Citons tout d'abord la méthode TFA (*Transformation Field Analysis*), formalisée par Dvorak et Benveniste [68], qui suppose que les déformations non-linéaires sont uniformes par phase. Cette hypothèse permet d'envisager l'application des méthodes d'homogénéisation linéaires, puisque l'on retrouve formellement une déformation libre, comme introduite par Eshelby. Les lois de comportement de chacun des constituants régissent ensuite l'évolution incrémentale des déformations non-linéaires. La méthode TFA induisant une forte sur-estimation de la raideur du composite équivalent, Michel et Suquet [143] ont proposé une extension avec des champs de déformation viscoplastique non-uniformes. Ces champs sont des combinaisons de modes plastiques déterminés par calculs numériques sur un VER. Bien qu'améliorant incontestablement la qualité de la réponse mécanique, même pour des chargements cycliques, cette méthode souffre de deux inconvénients majeurs : elle est lourde à mettre en place numériquement et surtout ne convient pas à l'analyse de structures présentant des champs microstructuraux hétérogènes.

D'autres techniques se fondent sur la notion de *matériau linéaire de comparaison*. La méthode tangente incrémentale, proposée par Hill [92], repose sur la relation entre les taux de déformation et de contrainte, phase par phase. Les opérateurs tangents ainsi introduits sont linéaires, et peuvent faire l'objet d'une procédure d'homogénéisation classique. Notons que l'étape d'homogénéisation, contrairement au cas linéaire, doit être effectuée à chaque incrément du calcul numérique, qui devient donc beaucoup plus coûteux. La méthode sécante [127, 128] repose sur des concepts similaires. Un opérateur (linéaire) sécant local permet de relier les contraintes aux déformations dans chaque phase à tout instant $t$, et est la cible des schémas d'homogénéisation. Tout comme la méthode tangente incrémentale, la méthode sécante sur-estime fortement la raideur apparente du composite. La méthode affine proposée par Masson et al. [139] est une piste pour améliorer les prédictions de ce type d'approche micromécanique. D'autres auteurs [58, 59, 166] proposent de corriger la sur-estimation de la raideur en considérant des décompositions spectrales des opérateurs tangents.

Suivant le schéma proposé par Li et Weng [127], repris par Pierard et Doghri [166], l'homogénéisation de composites dans le cadre de comportements élasto-viscoplastiques doit suivre deux étapes : un premier passage d'un comportement élasto-viscoplastique vers un comportement visco-élastique linéaire de comparaison ; un second passage à l'aide de la transformée de Laplace-Carson permet alors de se ramener au cadre élastique dans lequel on peut appliquer les schémas d'homogénéisation linéaires classiques.

Enfin, la détermination des moments d'ordre deux en plus des moyennes par phase permet, pour des matériaux à un seul potentiel (hyperélasticité, viscoplasticité), d'améliorer la qualité de la prédiction mécanique [170]. L'accès aux variations intraphasiques des grandeurs mécaniques semble également d'un grand intérêt pour le dimensionnement des matériaux composites. Des travaux plus récents ouvrent la voie vers une application de ces méthodes aux comportements plus complexes, à deux potentiels [117, 118].

### d Modélisation de l'interface fibre-matrice et endommagement

Jusqu'ici, dans tous les modèles micromécaniques que nous avons évoqués, les interfaces fibre-matrice ont été implicitement supposées parfaites. Or, même si les fabricants de matière plastique prennent soin d'ajouter des additifs permettant d'améliorer l'adhésion entre la matrice et les fibres, une description rigoureuse et complète du comportement d'un composite renforcé en fibres courtes doit modéliser le comportement et l'endommagement de l'interface fibre-matrice.

La littérature permet de mettre en évidence une influence forte de la température sur les modes de rupture en traction uniaxiale, ce qui s'explique tout d'abord par la moins bonne adhérence de l'interface lorsque la température augmente, puis par la différence de comportement de la matrice thermoplastique [187]. La présence de fibres partiellement mises à nu sur les faciès de rupture permet de mettre en évidence l'endommagement de l'interface, et les extrémités des fibres sont considérées comme des sites propices d'amorçage de microfissures par décohésion et cavitation locale. Il paraît ainsi difficile de s'affranchir de la modélisation de l'interface et de la supposer *a priori* parfaite, même dans le cas où l'on ne s'intéresse pas à la rupture du matériau. Nous présentons ici rapidement la façon de tenir compte de l'évolution des propriétés interfaciales dans un modèle micromécanique.

La rupture de l'interface fibre-matrice est considérée comme une variable aléatoire qui suit classiquement une loi de Weibull, fonction de la tension subie par les fibres, ou bien d'une combinaison entre la tension des fibres et le cisaillement de la matrice. Il est alors possible de modéliser les fibres ayant subi cette décohésion comme une troisième phase du matériau composite. Ju et al. [105] proposent de travailler avec du vide remplaçant les fibres dont l'interface est endommagée pour construire le comportement effectif. Leurs travaux sont appliqués à des composites à fibres longues ou à fibres courtes unidirectionnellement alignées, avec une homogénéisation pour un matériau triphasique non linéaire (matrice élastoplastique, fibres élastiques, fibres rompues).

Baptiste [12], dans sa revue sur la micromécanique des composites à fibres courtes, propose une modélisation similaire où les fibres rompues sont remplacées par des micro-fissures perpendiculaires à l'axe de traction. Le modèle d'homogénéisation est appliqué à une matrice d'aluminium renforcée en fibres courtes de silicate et présente une très bonne corrélation avec les essais expérimentaux. En plus de l'effet de la qualité de l'interface sur le comportement effectif, Baptiste indique la forte influence de la distribution des fibres dans le composite (uniformément réparties ou bien sous forme de *clusters*) sur le comportement mécanique : la présence d'amas de fibres peut fortement dégrader les propriétés mécaniques du composite.

Meraghni et al. [141] ont suivi la même approche, en considérant que la matrice, en plus des fibres,

s'endommage par microfissures également. Les trois phases du modèle (matrice thermoplastique, fibres de verre, vides) ont ainsi des fractions volumiques variables, mais le comportement local de chaque phase reste élastique. Ils proposent un schéma de double homogénéisation : une première étape pour calculer le comportement de la matrice endommagée, et une seconde pour calculer le comportement effectif avec les fibres intactes. La difficulté est alors de calculer numériquement le tenseur d'Eshelby entre la matrice endommagée (éventuellement anisotrope) et les fibres. Les auteurs ont corrélé leur modèle d'endommagement avec des enregistrements d'émissions acoustiques et ont pu identifier les occurences de chaque type d'endommagement : rupture puis propagation de fissures intramatricielles, décohésion interfaciale et frottements fibre/matrice, rupture de fibres.

Enfin, plus récemment, Bouaziz et al. [30], puis Zairi et al. [204] ont proposé un modèle d'endommagement par décohésion fibre-matrice un peu plus élaboré. En effet, les auteurs considèrent que remplacer les fibres présentant une interface rompue directement par du vide est une sous-estimation de la raideur effective du matériau. Ils proposent ainsi de remplacer les fibres rompues par une phase endommagée, dont le comportement est celui de la matrice. La phase endommagée, en plus du mécanisme d'initiation présenté, est supposée également obéir à une loi de croissance pour modéliser le fait que la décohésion fibre/matrice est un phénomène progressif. La croissance des porosités est alors proportionnelle à la croissance de la phase décohésive. L'homogénéisation du comportement est réalisée suivant un schéma de Mori-Tanaka sur trois phases, la quatrième (les porosités) ne pouvant pas transmettre d'efforts.

### 1.3.2 Approches phénoménologiques

Nous adoptons ici un point de vue différent de celui de la section précédente. Au contraire d'une démarche déductive fondée sur la micromécanique, nous nous proposons ici de balayer les modélisations phénoménologiques du comportement des thermoplastiques renforcés en fibres de verre. Ces modélisations sont cependant motivées et justifiées par la compréhension des mécanismes physiques microscopiques de déformation et/ou d'endommagement. Nous commençons par nous intéresser aux modélisations appliquées aux semi-cristallins non renforcés, où la physique du thermoplastique est davantage prise en compte, puis avec renforts, où ce sont avant tout les interactions entre les fibres et la matrice qui sous-tendent les modélisations.

#### a Thermoplastiques semi-cristallins

Les modélisations phénoménologiques des thermoplastiques semi-cristallins peuvent se classer en deux catégories, suivant qu'elles distinguent les mécanismes physiques intervenant dans les phases amorphe et cristalline, ou bien que les mécanismes de déformation proposés ne soient pas associés à une phase en particulier, mais directement « homogénéisés ».

**Distinction des mécanismes en fonction des phases amorphe ou cristalline**

Le premier modèle de comportement que nous relevons est celui proposé par Détrez [57] dans ses travaux de thèse. Il étudie trois thermoplastiques différents à température ambiante (polybutène, polyamide 6 et polycaprolactone) sous différentes sollicitations : traction monotone jusqu'à rupture, traction répétée (charge/décharge) et essais de relaxation. Il propose un modèle de comportement en somme de contraintes dues à la phase cristalline ou à la phase amorphe (réseau macromoléculaire). Le modèle rhéologique associé est présenté sur la figure 1.16.

Détrez modélise la réponse de la phase cristalline par un comportement élastoplastique endommageable, l'évolution de l'endommagement $D$ (évalué par la diminution du module de Young après

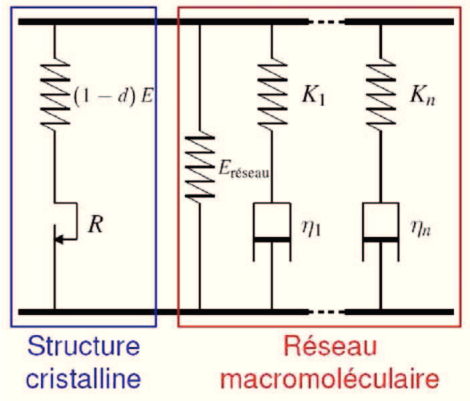



FIGURE 1.16 – Modèle rhéologique proposé par Détrez [57] pour le comportement de thermoplastiques semi-cristallins.

relaxation) étant gouvernée par la déformation plastique cumulée $p$, selon une loi :

$$D = A\left(1 - \exp\left(-Bp\right)\right) \tag{1.13}$$

La nécessité d'introduire un endommagement a été mise en évidence par des observations de vidéo-extensométrie et permet d'expliquer la chute de la raideur lors d'essais cycliques. La réponse de la phase amorphe est hyper-viscoélastique : le modèle rhéologique de Maxwell généralisé proposé présente une réponse élastique à temps infini qui suit une loi de type Arruda-Boyce [10]. Les paramètres viscoélastiques sont eux identifiés – puis recalés – grâce à des essais de DMA (*Dynamic Mechanical Analysis*) et de relaxation. Un tel modèle respecte la physique du matériau et décrit de nombreux aspects mécaniques, ce qui lui permet d'être assez bien corrélé avec les essais de traction répétée, comme constaté sur la figure 1.17. En revanche, il suppose l'identification d'un assez grand nombre de paramètres (15 paramètres, en ne conservant que trois temps caractéristiques visqueux), et manque de précision sur les essais de relaxation à différents niveaux de déformation, comme on le constate sur la figure 1.18. C'est manifestement la limite à une modélisation linéaire de la viscosité.

Ayoub et al. [11] ont également choisi de reprendre pour la modélisation du comportement des semi-cristallins l'approche générale des modèles d'Arruda et Boyce proposés pour des polymères amorphes [10]. Ils considèrent que la résistance du réseau macromoléculaire peut s'écrire à l'aide d'un ressort inélastique (alignement des chaînes) et d'un élément visqueux modélisant la relaxation des chaînes (influencée par la température), suivant ainsi la proposition de Boyce et al. [32]. La résistance intermoléculaire tient elle compte du fait que le matériau semi-cristallin est biphasique. Elle se dédouble donc en une composante amorphe et une composante cristalline, pondérées par le taux de cristallinité, comme illustré sur la figure 1.19, et qui suivent chacune le modèle VBO (*Viscoplasticity Based on Overstress*) dont l'intérêt pour les matériaux polymères est exposé par Ho et Krempl [94], Krempl et Khan [115]. Les auteurs parviennent alors à simuler le comportement en traction (monotone ou avec décharge) ainsi que les essais de relaxation d'un polyéthylène à température ambiante. L'introduction d'une fonction différenciant les lois d'écoulement en charge ou en décharge, inspirée des travaux de Colak [48], permet d'améliorer la simulation des phases de retour en comparaison avec des modèles similaires pré-existants. Leurs travaux sont appliqués à un polyéthylène haute densité, avec une corrélation calcul-essai satisfaisante, mais nécessitant l'identification d'une vingtaine de paramètres.

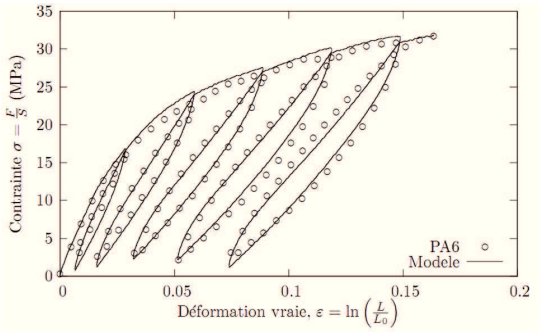



FIGURE 1.17 – Identification du modèle de Détrez [57] pour une éprouvette de polyamide 6 soumise à des essais cycliques de charge/décharge en traction uniaxiale. La base d'identification comporte également un essai de traction monotone et un essai de relaxation.

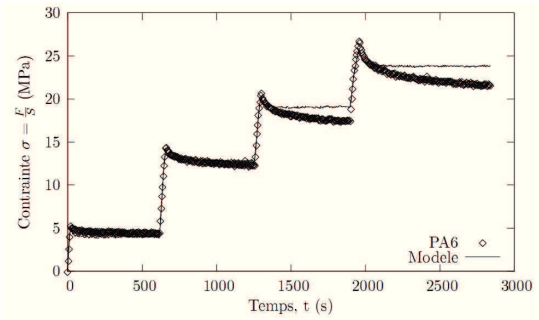



FIGURE 1.18 – Validation du modèle de Détrez [57] pour une éprouvette de polyamide 6 soumise à des essais de relaxations multiples en traction uniaxiale.

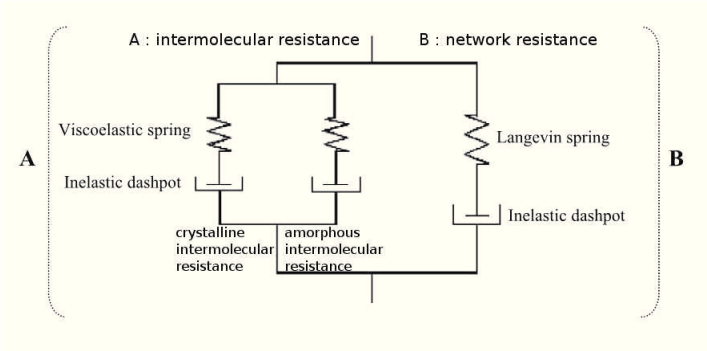



FIGURE 1.19 – Schéma rhéologique proposé par Ayoub et al. [11] pour le comportement de semi-cristallins.

Parenteau [160] s'est intéressé dans ses travaux de thèse à un autre semi-cristallin, le polypropylène, avant apparition de l'endommagement. Sa modélisation consiste à décomposer la déformation en parties viscoélastique et viscoplastique, comme proposé par Zaïri et al. [205] pour des thermoplastiques amorphes. Il considère, comme Détrez, que les mécanismes viscoélastiques sont liés à la phase amorphe tandis que ceux de la phase cristalline se traduisent par de la viscoplasticité. Notons que cette modélisation est cohérente avec la description des mécanismes physiques de déformation des thermoplastiques semi-cristallins, tels que nous les avons présentés en section 1.2. Le modèle rhéologique associé à la loi de comportement proposée par Parenteau est présenté sur la figure 1.20.

La déformation viscoélastique est représentée par un modèle de Zener avec un potentiel visqueux non-linéaire de Norton-Hoff :

$$\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^{(1)} = \frac{3}{2}\left(\frac{J_2}{\eta}\right)^n \frac{\underline{\underline{s}}^{(1)}}{J_2} \tag{1.14}$$

$\eta$ et $n$ sont les coefficients de la loi de Norton-Hoff, tandis que $\underline{\underline{s}}^{(1)}$ représente la part de la contrainte totale (déviatorique) qui active les mécanismes visqueux. $J_2$ est la contrainte équivalente de von Mises

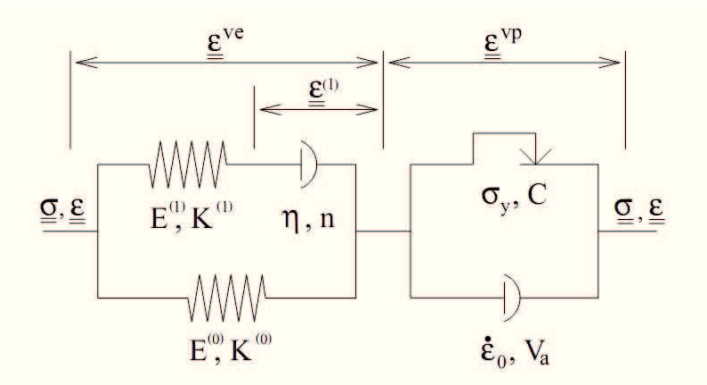



FIGURE 1.20 – Modèle rhéologique proposé par Parenteau [160] pour le comportement de thermoplastiques semi-cristallins (9 paramètres en adoptant un coefficient de Poisson unique).

associée à $\underline{\underline{s}}^{(1)}$. La déformation viscoplastique est caractérisée par l'évolution de la déformation plastique cumulée $p$ dépendant de la fonction de charge $F$ :

$$\dot{p} = \dot{\epsilon}_0 \sinh\left(\frac{FV_a}{k_B T}\right) \tag{1.15}$$

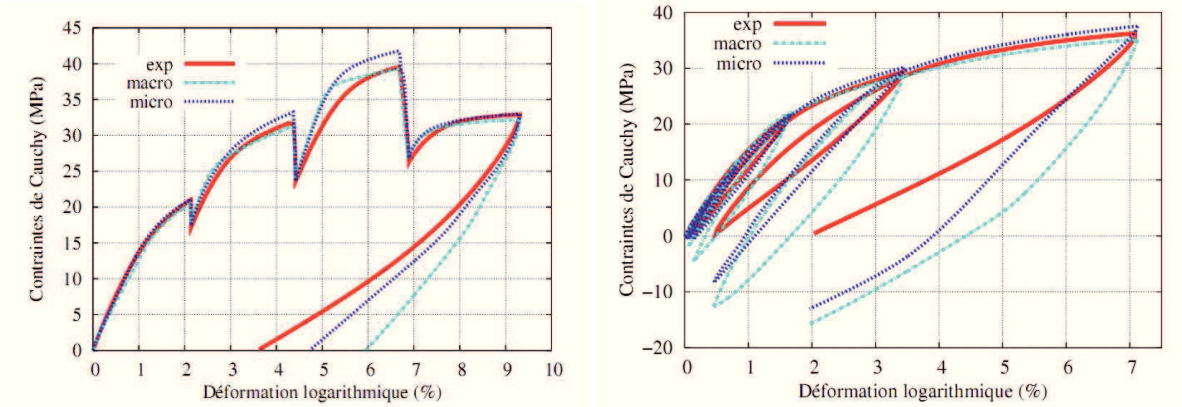
$\dot{\epsilon}_0$ est un coefficient du modèle, $k_B$ la constante de Boltzmann et $V_a$ est un volume d'activation. Sa formulation est issue de la loi d'Arrhenius qui est maintes fois citée dans la littérature comme décrivant fidèlement l'activation de la plasticité cristalline [8].

Parenteau compare les résultats de ce modèle avec ceux issus d'une homogénéisation des deux phases amorphe et cristalline (la phase cristalline est alors modélisée par le modèle macroscopique ci-dessus tandis que la phase amorphe est supposée viscoélastique linéaire). Bien que plus sophistiqué, le modèle micro-mécanique avec homogénéisation n'est pas beaucoup plus prédictif que le modèle phénoménologique, comme on peut le constater sur la figure 1.21. Il apparaît notamment difficile de bien décrire les phases de décharges dès que les niveaux de contrainte atteints sont importants.

Le modèle proposé par Regrain et al. [174] est en toute rigueur un modèle micro-mécanique, puisqu'il utilise une règle de localisation via un modèle en $\beta$ (variante de la méthode TFA dans le cadre d'un schéma auto-cohérent). Néanmoins, la façon dont les auteurs simplifient la localisation en n'utilisant qu'un seul paramètre $A$ (en lieu et place du tenseur de localisation $\mathbb{A}$) permet de classer cette approche avec les modèles phénoménologiques. Ils montrent que pour simuler le comportement en traction monotone – avant endommagement – et en fluage du polyamide 6 à 25 °C et 50 % d'humidité ambiante, le modèle 2M2C (2 mécanismes, 2 critères) est pertinent. Ils associent un mécanisme à la phase cristalline et un autre à la phase amorphe, chacun étant supposé répondre à un écoulement viscoplastique avec un potentiel de Norton. La déformation totale se calcule comme la somme des déformations élastique et viscoplastique dans chaque phase (pondérées par le taux de cristallinité $z$) :

$$\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^{\text{totale}} = \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^{\text{elas}} + z\,\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^{\text{cristalline}} + (1-z)\,\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^{\text{amorphe}} \tag{1.16}$$

L'introduction de deux mécanismes viscoplastiques avec deux critères est justifiée dans ces travaux par la volonté de décrire précisément les deux premiers régimes de fluage à long terme. Les auteurs mettent en évidence que la déformation sous chargement monotone est essentiellement localisée dans




(a) Essai de charge/décharge avec paliers de relaxation (b) Essai cyclique de charge/décharge de niveaux croissants

FIGURE 1.21 – Comparaison avec l'essai des résultats des modèles phénoménologique et micromécanique proposés par Parenteau [160] pour deux essais en traction uniaxiale. Ces essais, ainsi qu'un essai de décharge avec paliers de fluage/fluage inverse (*dip-test*) et un essai de nano-indentation, font partie de la base d'identification.

la phase amorphe, tandis que la réponse de fluage à long terme est contrôlée par la phase cristalline. Une extension du modèle avec évolution du taux de cristallinité $z$ et modélisation de la cristallisation sous contrainte a été proposée et validée.

Enfin, Drozdov et Christiansen [67] proposent une modélisation sous-tendue non seulement par le caractère hétérogène des thermoplastiques, mais aussi par une interprétation de sa microstructure. Ils considèrent ainsi un semi-cristallin comme un assemblage de mésodomaines, reliés par des noeuds tels que des lamelles cristallines ou des enchevêtrements de chaînes amorphes. La déformation est vue comme la somme d'une composante élastique, et de deux composantes plastiques correspondant aux glissements des chaînes au sein d'un mésodomaine, ou bien au glissement des mésodomaines les uns par rapport aux autres – ce second mécanisme n'étant activé que lors des phases de décharge.

Hizoum et al. [93], Oshmyan et al. [155] estiment également que la description des phases de décharge suppose la modélisation de micromécanismes spécifiques aux polymères. A partir d'une description de la microstructure semblable à celle de Drozdov et Christiansen [67], ils proposent un modèle où les fractions volumiques des phases amorphe et cristalline évoluent en fonction de la contrainte appliquée. La phase cristalline est viscoplastique, et sa déformation répond à une loi d'Eyring ($U$ est une énergie d'activation thermique, $V_a$ un volume d'activation et $\sigma$ la contrainte appliquée) :

$$\dot{\varepsilon}_p = \dot{\varepsilon}_0 \exp\left(\frac{-U}{k_B T}\right) \sinh\left(\frac{\sigma V_a}{k_B T}\right) \tag{1.17}$$

Ce couplage entre la réponse mécanique et l'évolution de la microstructure permet de prédire précisément la décharge lors de chargements cycliques.

Toujours dans l'idée de coupler la réponse mécanique à l'évolution de la microstructure, on pourra se reporter à la modélisation proposée par Lai et al. [119] et Yakimets et al. [200] pour simuler la réponse viscoélastique non-linéaire sous chargements cycliques de traction/compression et torsion à des niveaux de contrainte modérés. Le modèle proposé s'appuie sur un VER composé d'une phase cristalline et de deux phases amorphes haute et basse densité. La croissance de cette dernière phase

(qui obéit à une loi d'Eyring) correspond à la modélisation du glissement d'une fraction des chaînes du réseau macromoléculaire, et permet de mieux décrire la décharge que les modèles viscoélastiques classiques. Notons qu'une modélisation fine des couplages entre la réponse mécanique et l'évolution microstructurale doit être sous-tendue par des justifications expérimentales ; les travaux de Marco [138] et Poitou et al. [168] constituent en ce sens un exemple abouti où l'évolution de l'orientation des chaînes et la cristallisation induite par déformation, caractérisées expérimentalement, permettent d'enrichir avec succès un modèle hyper(visco)élastique, dans un cadre thermodynamique.

**Mécanismes de déformation non-associés à une phase**

Kichenin [110] s'est intéressé au cours de sa thèse au comportement du polyéthylène à température ambiante, pour des chargements statiques à faible niveau de contrainte/déformation. Contrairement aux approches précédentes, il n'est pas concerné par les problèmes d'extension des chaînes, ni par les phénomènes d'adoucissement/durcissement en résultant. Par contre, à l'aide d'une base d'essais TRR (traction - relaxation - recouvrance), il met en évidence le caractère découplé des mécanismes visqueux et plastiques. Il propose ainsi un modèle de comportement dit « bicouche », où une branche plastique écrouissable (écrouissage cinématique linéaire) est en parallèle d'une branche viscoélastique non-linéaire (potentiel de dissipation visqueuse de Norton-Hoff). Notons que Kichenin n'associe pas un mécanisme (viscosité ou plasticité) à une phase particulière du matériau. La contrainte totale s'exprime comme la somme des contraintes viscoélastique et élastoplastique.

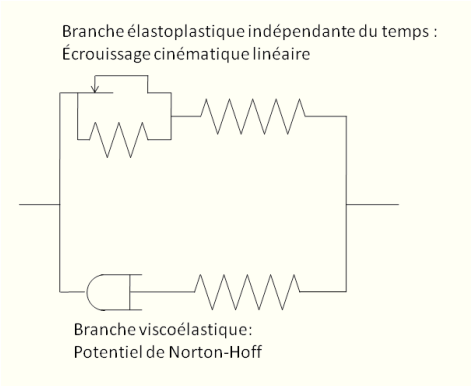



FIGURE 1.22 – Schéma rhéologique proposé par Kichenin pour le comportement sous chargement statique du polyéthylène semi-cristallin [110, 111].

Boisot [28] a étudié le comportement et l'endommagement du polyamide 11 à température ambiante. Il propose de simuler le caractère élasto-visco-plastique mis en évidence par des essais de traction à différentes vitesses à l'aide d'une décomposition de la déformation en parties élastique et inélastique :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\varepsilon}}^{e} + \underline{\underline{\varepsilon}}^{in} \tag{1.18}$$

La déformation inélastique suit une loi d'évolution viscoplastique avec un potentiel de Norton-Hoff ainsi qu'un écrouissage isotrope. Aux grandes déformations, un terme de rhéodurcissement est ajouté pour mieux décrire la loi d'écrouissage. Boisot nous fait remarquer qu'il prédit une limite d'élasticité suffisamment basse pour ne pas avoir à représenter de phénomènes visqueux découplés de la plasticité (purement viscoélastiques), comme l'a fait Kichenin. Notons que Roguet et al. [177] ont utilisé

une modélisation similaire pour décrire le comportement à haute température (où la phase amorphe se trouve à l'état caoutchoutique), sur des essais de traction et torsion en charge/décharge, et sur des essais de relaxation. Il est montré que l'emploi d'un seul mécanisme viscoplastique ne peut suffire à décrire le comportement cyclique du polyamide 11, comme on peut le voir sur la figure 1.23. En revanche, l'utilisation de la déformation et de la contrainte équivalentes de von Mises (c'est-à-dire fondées sur le second invariant) permettent de parfaitement corréler les résultats obtenus en traction et en torsion.

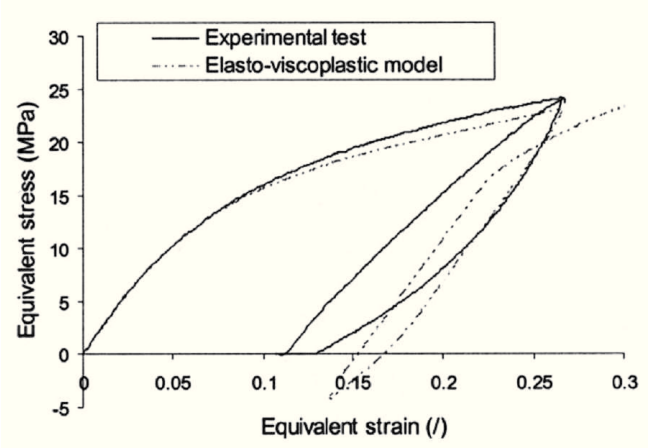



FIGURE 1.23 – Comparaison entre l'essai de traction uniaxiale (charge/décharge) sur un PA 11 à 100 ˚C et la réponse prédite par le modèle de Roguet et al. [177]. Le modèle comporte 11 paramètres, identifiés sur un essai de traction suivie d'une phase de relaxation.

Une possible amélioration, comme le suggère Boisot, est de distinguer deux composantes dans la déformation inélastique. Nous aboutissons alors au modèle DDI (double déformation inélastique), notamment mis en œuvre par Ben Hadj Hamouda [18]. La déformation totale s'écrit alors $\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\varepsilon}}^{e} + \underline{\underline{\varepsilon}}^{vp_1} + \underline{\underline{\varepsilon}}^{vp_2}$ où deux déformations viscoplastiques entrent en jeu dans le modèle. Ce double mécanisme rappelle celui proposé par Regrain et al. [174], mais sans association des mécanismes viscoplastiques aux phases cristalline ou amorphe. Ben Hadj Hamouda montre ainsi une bonne corrélation entre son modèle et des essais de traction et de fluage, ainsi que sur des essais de saut de vitesse (réalisés à 60 ˚C), mais malheureusement aucune confrontation avec des essais de charge/décharge n'est présentée.

Enfin, Ghorbel [77] s'est intéressé aux critères de plasticité des polymères (en général) et des thermoplastiques semi-cristallins (en particulier). Elle développe des critères fondés sur les second et troisième invariants du déviateur des contraintes, ainsi que sur la pression hydrostatique. Néanmoins, dans la plupart des applications, elle montre qu'un critère de type Drucker-Prager permet de rendre compte d'une limite élastique en compression supérieure à celle en traction. Pour son travail de modélisation du comportement des semi-cristallins aux petites déformations (inférieures à 5 %), l'auteur décompose la déformation en parties élastique et inélastique, et suggère une loi d'écoulement viscoplastique de type Norton-Hoff lorsque le critère proposé est dépassé. Il enrichit la modélisation de l'écrouissage cinématique non-linéaire en ajoutant un potentiel de dissipation recouvrable. La corrélation calcul-essai, appliquée à des essais de traction ou compression monotone, ainsi qu'à des essais cycliques de traction-compression sur un polyamide 12 à température ambiante, est satis-

faisante. Néanmoins, les résultats sur des essais de relaxation ne sont pas présentés et auraient été intéressants pour discriminer les choix de modélisation.

### b Thermoplastiques renforcés en fibres courtes

Nous nous intéressons désormais aux modèles phénoménologiques du comportement de thermoplastiques renforcés en fibres de verre courtes. Si de nombreux auteurs se sont intéressés à ces matériaux, la grande majorité ont recours à des techniques d'homogénéisation pour prendre en compte l'influence des renforts fibrés sur la matrice thermoplastique (voir section 1.3.1). Quelques approches phénoménologiques sont cependant envisagées dans la littérature, et s'inspirent le plus souvent de modélisations appliquées à des thermoplastiques non chargés.

Drozdov et al. [65, 66] appliquent le concept de mésodomaines à un polycarbonate renforcé en fibres de verre courtes. Les mésodomaines représentent alors des blocs lamellaires dont les déformations sont accommodées par la phase amorphe environnante, ou bien encore des fibres courtes qui entraînent dans leurs déplacements les chaînes polymériques voisines. Les glissements entre mésodomaines sont liés aux ruptures de liaisons chimiques dans la matrice (Van der Walls, hydrogène), ou encore aux décohésions fibre/matrice par exemple. Ce modèle phénoménologique est sous-tendu par une hypothèse de relaxation probabiliste des mésodomaines, activée thermiquement. La confrontation aux résultats expérimentaux pour différents cas de chargement est bonne, mais on notera l'absence de sollicitation cyclique. Par ailleurs, la distribution d'orientation des fibres n'intervient pas dans la modélisation : son application à des pièces injectées semble donc difficile.

Rémond [176] met en œuvre le même formalisme que Oshmyan et al. [155] pour les thermoplastiques fibrés. Les auteurs montrent notamment l'incapacité de modélisations viscoélastiques usuelles (Maxwell, Zener, Zener-Weber) à rendre compte de la réponse mécanique cyclique pour des histoires de chargement complexes (saut de vitesse, recouvrance, etc). Même si la présence des fibres atténue les caractéristiques non-linéaires du comportement mécanique (en comparaison avec la matrice seule), l'emploi de mécanismes spécifiques liés aux évolutions de la microstructure semble nécessaire, notamment pour représenter la décharge.

Chaboche [39] propose d'appliquer aux composites à matrice polymère le modèle élasto-viscoplastique (EVP) unifié de Lemaitre et Chaboche [125]. Le potentiel de dissipation visqueuse suit une loi de Norton-Hoff, et un écrouissage isotrope complète une formulation avec de multiples écrouissages cinématiques. Il montre que sa modélisation du comportement permet de rendre compte de phénomènes physiques rencontrés pour les thermoplastiques renforcés en fibres courtes : fort caractère visqueux, plasticité cyclique, etc. Notamment, l'auteur suggère l'emploi d'un seuil plastique assez faible et d'un exposant proche de 1 dans l'expression du potentiel de Norton-Hoff pour rendre compte des effets viscoélastiques à niveau de contrainte modéré.
Chaboche [39] évoque également une autre façon de modéliser les forts effets visqueux observés sur les composites à matrice polymère : le modèle spectral. En reprenant les travaux de Maire (1992), il propose une décomposition de la déformation totale en partie élastique et visqueuse, la partie visqueuse étant constituée d'un grand nombre de sous-déformations viscoélastiques :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\varepsilon}}^{elas} + \underline{\underline{\varepsilon}}^{visq} = \underline{\underline{\varepsilon}}_e + \sum_{i=n_1}^{n_2} \underline{\underline{\xi}}_i \tag{1.19}$$

où les déformations $\underline{\underline{\xi}}_i$ suivent des lois viscoélastiques linéaires. Les temps caractéristiques de ces lois sont supposés suivre une distribution gaussienne, si bien que l'on peut écrire chaque loi visqueuse selon :

$$\dot{\underline{\underline{\xi}}}_i = \frac{1}{\tau_i}\left(\underline{\underline{\xi}}_i - a\mu_i\underline{\underline{\sigma}}\right) \tag{1.20}$$

$$\text{avec} \quad \tau_i = \exp(i) \quad \text{et} \quad \mu_i = \frac{1}{\sqrt{\pi}n_0}\exp\left(-\left(\frac{i-n_c}{n_0}\right)^2\right) \tag{1.21}$$

Ce type de modélisation permet de bien rendre compte du comportement fortement non-linéaire des composites à matrice polymère, comme on peut le constater sur la figure 1.24 [12]. Par ailleurs, le faible nombre de paramètres du modèle spectral lui confère un intérêt certain, en comparaison notamment avec les identifications à partir d'essais DMA qui impliquent plusieurs temps de relaxation et donc de nombreux coefficients (voir le modèle de Détrez pour les thermoplastiques semi-cristallins). Par contre, si les origines physiques de cette modélisation phénoménologique peuvent se trouver dans l'activation de différents mécanismes de viscosité dans le réseau macromoléculaire, une telle approche ne permet pas de rendre compte de phénomènes plastiques (déformation rémanente nulle à temps infini) [13]. Enfin, Chaboche montre qualitativement que l'approche élasto-viscoplastique et le modèle spectral peuvent mener à des résultats semblables sur des chargements cycliques.

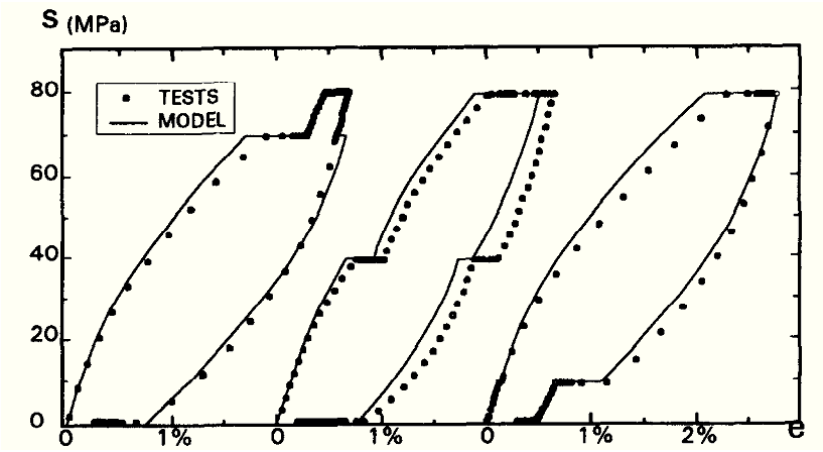



FIGURE 1.24 – Application du modèle spectral à la simulation d'un stratifié verre-époxy sous chargement de traction en charge/décharge avec des paliers de fluage/recouvrance, et comparaison aux résultats expérimentaux de Maire (1992), d'après [39].

Plus récemment, Andriyana et al. [6] ont adopté une modélisation phénoménologique d'un thermoplastique renforcé en fibres de verre courtes à 30 % en masse. Leur approche, formulée en grandes transformations, suppose que le matériau est composé d'une phase matricielle (viscoélastique) et

12. En toute rigueur, il faut noter que la figure 1.24 présente une application du modèle spectral à un stratifié verre-epoxy, c'est-à-dire à un composite à matrice *thermodurcissable* renforcé de fibres *longues*. Cependant, du point de vue de la modélisation phénoménologique, rien n'interdit d'appliquer ce modèle ou encore le modèle EVP unifié à des thermoplastiques renforcés en fibres courtes.

13. Remarquons néanmoins qu'il est difficile de distinguer des mécanismes plastiques de mécanismes visqueux présentant de très longs temps de relaxation, comme cela est mis en évidence par Pegoretti et al. [162].

d'une phase fibre à laquelle est liée un volume de matrice, appelé interphase. Cette seconde phase est supposée avoir un comportement élasto-plastique anisotrope. Comme illustré sur la figure 1.25, le comportement du composite est simplement obtenu en sommant les contraintes provenant de ces deux contributions. Les auteurs ont appliqué leur modélisation sur des éprouvettes prélevées à différentes orientations dans des plaques injectées. La loi d'évolution élastoplastique est formulée en fonction du tenseur d'orientation des fibres $\underline{\underline{a}}^{\psi}$ [14], son caractère anisotrope est donc directement relié à la microstructure. L'idée sous-jacente est de formuler le taux de déformation plastique dans la direction moyenne des fibres en remarquant que la quantité

$$\lambda^F \equiv \sqrt{\int_\Omega \psi(\underline{p}) \left(\underline{\underline{F}} \cdot \underline{p}\right) \cdot \left(\underline{\underline{F}} \cdot \underline{p}\right) \, \mathrm{d}\omega} = \sqrt{\underline{\underline{C}} : \underline{\underline{a}}^{\psi}}$$

est l'élongation dans la direction moyenne des fibres. On adopte ici les notations propres aux grandes transformations, à savoir que $\underline{\underline{F}}$ est le gradient de la transformation et $\underline{\underline{C}}$ le tenseur des dilatations de Cauchy. Cette approche phénoménologique, fondée sur une compréhension physique des mécanismes de déformation, permet de simuler avec précision la réponse cyclique non-linéaire (voir la figure 1.26), en faisant apparaître l'anisotropie de la réponse mécanique comme conséquence naturelle de la microstructure. Néanmoins, nous pouvons émettre des réserves quant à la nécessité de formuler le modèle en grandes transformations alors que le niveau des déformations n'excède pas 3.5 %, de même qu'il nous semble peu justifié d'adopter une hypothèse d'incompressibilité ($\det \underline{\underline{F}} = 1$) pour ce type de matériau.

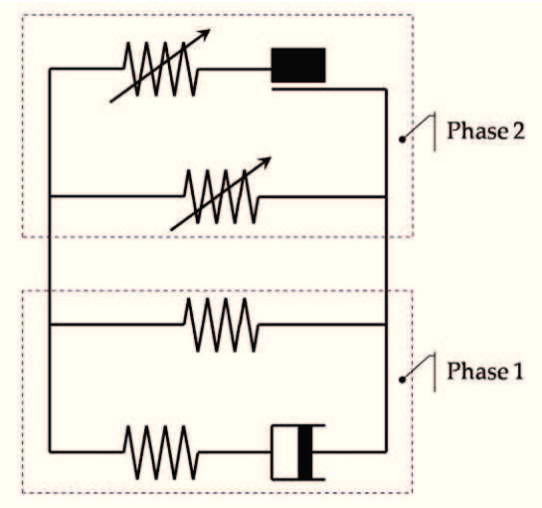



FIGURE 1.25 – Schéma rhéologique proposé par Andriyana et al. [6]. La phase 1 (matrice) est supposée viscoélastique, tandis que la phase 2 (fibres et interphase) est élastoplastique anisotrope.

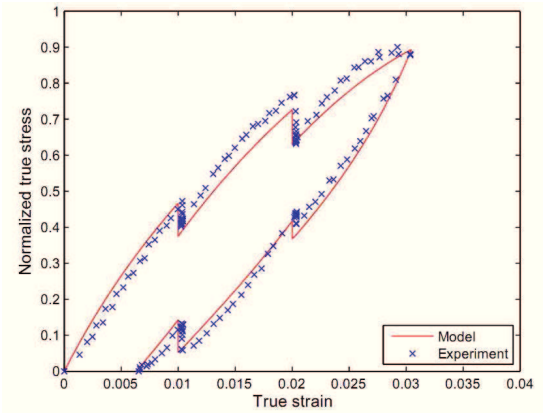



FIGURE 1.26 – Comparaison calcul-essai sur une courbe anhystérétique à partir du modèle d'Andriyana et al. [6], pour une éprouvette prélevée dans une plaque à un angle de 0°.

### 1.3.3 Discussion

Nous avons passé en revue les approches micromécaniques et phénoménologiques existant dans la littérature pour modéliser le comportement des thermoplastiques renforcés en fibres courtes. Nous

14. Voir la section 5.1 pour plus de détails concernant les tenseurs d'orientation associés à une distribution $\psi$.

présentons dans cette section une analyse critique des avantages et inconvénients de chaque méthode pour l'application au calcul de structures sous chargement cyclique dans un cadre industriel.

Les approches micromécaniques, fondées sur différentes méthodes d'homogénéisation multi-échelles, présentent des avantages indéniables. Tout d'abord, elles rendent compte de manière intrinsèque du caractère hétérogène du matériau. Il est ainsi possible d'avoir accès aux moyennes (voire même aux moments d'ordre 2) par phase des grandeurs mécaniques locales. L'anisotropie de la réponse mécanique du composite est une conséquence naturelle du choix du VER, avec des constituants qui sont en général supposés posséder des propriétés isotropes. De façon plus générale, ces méthodes décrivent un lien fort entre la microstructure et la réponse mécanique, ce qui permet d'intégrer l'influence du procédé de mise en forme (distribution d'orientation des fibres induite par le moulage par injection). Du point de vue mécanique, des schémas d'homogénéisation de plus en plus complexes permettent de modéliser des lois de comportement non-linéaires (élasto-plastique, viscoélastique, élasto-viscoplastique, ...), et même de décrire des interactions complexes entre les fibres et la matrice (endommagement, décohésion interfaciale). Un autre intérêt des méthodes micromécaniques est valorisé du point de vue des concepteurs : il est facile de faire varier des paramètres du matériau (taux de fibres, rapport d'aspect des renforts, etc.) et d'observer l'influence sur la réponse du composite.

Il faut néanmoins apporter plusieurs réserves quant à l'application de ces méthodes. Tout d'abord, le comportement de la matrice thermoplastique est différent lorsqu'elle est seule ou en présence de fibres. Ceci s'explique notamment par des modifications de la morphologie semi-cristalline, et implique donc une identification inverse des paramètres de la loi de comportement de la matrice pour le composite. Cette remarque vaut aussi pour l'identification des propriétés d'interface fibre-matrice. Notons que dans la plupart des cas présentant un comportement non-linéaire de la matrice, l'interface est supposée parfaite : les probables dégradations interfaciales sont alors intégrées dans la non-linéarité de la réponse matricielle. Enfin, la durée des calculs avec des schémas d'homogénéisation non-linéaire est encore aujourd'hui très importante, et difficilement compatible avec une application en bureau d'étude industriel. Ceci explique pourquoi il n'existe pas dans la littérature actuelle, à notre connaissance, de validation des méthodes micromécaniques sur des structures composites en polymère renforcé par des fibres courtes soumises à des chargements cycliques.

A l'inverse, les approches phénoménologiques sont relativement faciles à intégrer dans des codes de calcul par éléments finis. Le cadre des matériaux standard généralisés défini par Halphen et Nguyen [81] et Germain et al. [76] est suffisamment souple pour permettre de modéliser de nombreux phénomènes physiques tout en respectant les principes généraux d'admissibilité thermodynamique. Remarquons que les thermoplastiques semi-cristallins ont fait l'objet de nombreuses modélisations, qui mettent en évidence différentes particularités de la réponse mécanique : viscoélasticité à plusieurs échelles de temps, endommagement, adoucissement de la réponse cyclique, déformations rémanentes, asymétrie charge-décharge, évolutions microstructurales, etc. Ces travaux sont en règle générale fondés sur des interprétations des micromécanismes de déformation [31, 130], d'où ils tirent leur justification physique.

Dans la mesure où les renforts ne remettent pas en question ces micromécanismes, il est possible d'appliquer ces modèles phénoménologiques aux composites à matrice thermoplastique [65, 66, 176]. En dépit du fort contraste de propriétés entre les fibres et la matrice, le matériau est considéré comme homogène pour le calcul de structures. Notons que la présence des fibres réduit en règle générale l'amplitude des déformations admissibles par le matériau, ce qui rend possible une formulation des modèles dans le cadre des petites déformations. La difficulté des approches phénoménologiques réside surtout dans le fait de prendre en compte les informations de la microstructure, et notamment de la

distribution d'orientation des fibres, pour exprimer l'anisotropie de la réponse mécanique. On pourra se référer aux travaux d'Andriyana et al. [6] qui constituent un bon exemple d'une telle intégration. En effet, une pièce en thermoplastique renforcé en fibres courtes, mise en forme par injection, possède un champ complexe d'orientation des fibres qui ne peut pas s'apparenter à des cas théoriques (microstructure aléatoire 2D ou 3D, microstructure unidirectionnelle). Une approche phénoménologique n'est donc envisageable que dans la mesure où le lien procédé-comportement est explicité.

A l'heure actuelle, les travaux les plus avancés concernant la simulation du comportement pour une application au dimensionnement en fatigue dans un cadre industriel s'appuient en règle générale sur une modélisation multi-échelles avec des comportements élastiques linéaires isotropes des phases fibre et matrice. Nous pouvons citer les travaux de Klimkeit [112] qui propose d'utiliser un schéma de Mori-Tanaka avec moyenne des raideurs en fonction de l'orientation (homogénéisation en deux étapes), à l'aide du logiciel DIGIMAT®. Ce logiciel utilise les informations d'orientation des fibres calculées par un logiciel de simulation d'injection tel que MOLDFLOW®. La réponse du composite est donc supposée élastique linéaire anisotrope, hypothèse consentie pour que les temps de calculs soient compatibles avec les contraintes industrielles. Néanmoins, une description fine des mécanismes non-linéaires est nécessaire pour espérer pouvoir corréler les grandeurs mécaniques locales à la tenue en fatigue.

Dans la suite de ce manuscrit, notre objectif sera donc de proposer une approche à mi-chemin entre les deux extrêmes que sont les modèles d'homogénéisation dans le cadre non-linéaire, trop lourds numériquement, et les modèles phénoménologiques déconnectés de la microstructure. Nous pensons qu'il est possible d'intégrer dans une approche phénoménologique, riche du point de vue de la description des mécanismes de déformation, des informations microstructurales liées à l'orientation des fibres. C'est ce qui sera développé dans la suite de la partie I.

# Chapitre 2

# Analyse de sollicitations

**Sommaire**


**2.1 Modèle thermique** . . . . . **43**
2.1.1 Données expérimentales . . . . . 44
2.1.2 Méthode de filtrage sur cycles stabilisés . . . . . 45
2.1.3 Validation sur roulage en clientèle . . . . . 47
2.1.4 Discussion . . . . . 48
**2.2 Modèle thermo-hygrométrique** . . . . . **49**
2.2.1 Modélisation de la diffusion de l'eau dans les thermoplastiques . . . . . 49
2.2.2 Validation du modèle de diffusion de l'eau . . . . . 53
2.2.3 Application du modèle thermo-hygrométrique au RST . . . . . 56
2.2.4 Discussion sur les conditions d'utilisation en service . . . . . 58


Les pièces cibles de la thèse sont utilisées dans l'environnement du moteur, notamment dans le circuit d'admission d'air. Elles sont donc soumises à un environnement thermo-hygrométrique complexe, dépendant à la fois des conditions extérieures (température, taux d'humidité de l'air ambiant) et des conditions de fonctionnement du moteur (température des gaz d'admission liée au fonctionnement du turbo-compresseur).

La réponse mécanique des polyamides chargés en fibres de verre est très sensible aux conditions environnementales (température, taux d'humidité). Il est ainsi important de pouvoir déterminer une plage de sollicitations $T$-$\mathcal{H}$ représentative des conditions d'utilisation en service. Un modèle thermique a tout d'abord été mis en place de façon à évaluer l'évolution de la température de la matière en fonction des conditions d'utilisation. Dans un second temps, un modèle couplé thermo-hygrométrique a ensuite permis d'estimer les variations de la teneur en eau du PA66-GF35 rencontrées lors de la vie en service.

## 2.1 Modèle thermique

La température des pièces étudiées (raccord de sortie du turbo, répartiteur d'air à l'admission) n'est pas mesurée de façon directe. Cependant, certains véhicules faisant partie d'une campagne de mesure en clientèle ont été instrumentés et la température d'air sous capot ainsi que la température d'air dans le circuit ont été mesurées pendant le fonctionnnement en service.

Nous avons étudié les signaux de façon à réaliser une reconstruction de la température de la matière à partir de la température de l'air et à valider une méthode de filtrage permettant de traiter directement la puissance du moteur pour retrouver une bonne approximation de la température matière.

### 2.1.1 Données expérimentales

La pièce étudiée est le raccord de sortie du turbo (RST) du véhicule MCV (utilitaire vendu sur le marché turc), équipé d'un moteur DV4, c'est-à-dire un moteur Diesel de cylindrée 1.4 litre. La géométrie de la pièce est présentée sur la figure 2.1. Chaque véhicule possède sa propre architecture et donc ses propres composants, mais le raccord étudié est représentatif des raccords équipant les véhicules de la gamme PSA. Par ailleurs, comme le raccord de sortie du turbo est soumis à des sollicitations thermiques aussi sévères que le répartiteur, mais mieux connues, c'est cette pièce qui nous sert d'étalon pour la méthode.

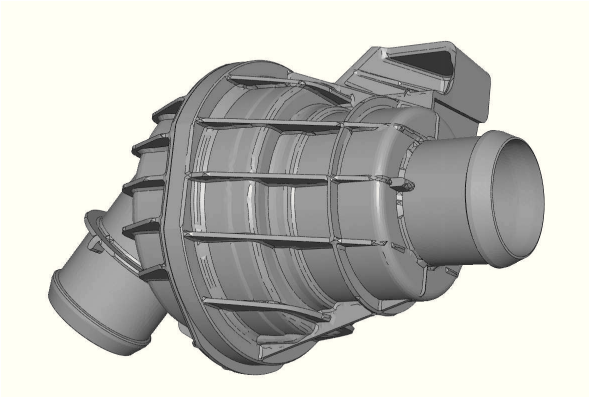
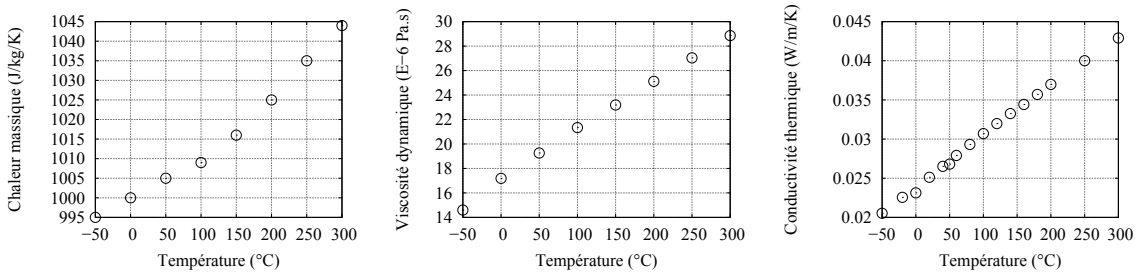


FIGURE 2.1 – Vue du modèle CAO du raccord de sortie du turbo du véhicule MCV DV4.

Les caractéristiques thermiques du PA66-GF35 sont présentées dans le tableau 2.1. Remarquons que nous négligeons ici toute influence de l'orientation des fibres sur ces propriétés, qui sont supposées être homogènes et isotropes. Les caractéristiques thermiques de l'air dépendent de façon plus sensible de la température, comme illustré sur la figure 2.2.

| Grandeur physique | Symbole | Unité | Valeur |
|---|---|---|---|
| Conductivité thermique (à 140 °C) | $\lambda$ | $W.m^{-1}.K^{-1}$ | 0.33 |
| Chaleur spécifique | $c_p$ | $J.kg^{-1}$ | 2130 |
| Masse volumique | $\rho$ | $kg.m^{-3}$ | 1410 |
| Épaisseur caractéristique | $e$ | mm | 2.5 |
| Convection thermique | $h$ | $W.m^{-2}.K^{-1}$ | 5–100 |

TABLE 2.1 – Valeurs des grandeurs physiques du PA66-GF35 intervenant dans le calcul thermique du RST (source DuPont™). La valeur de $h$ dépend des conditions expérimentales, et $\lambda$ décroît légèrement avec $T$.




(a) Chaleur massique $c_p^a$ (b) Viscosité dynamique $\mu^a$ (c) Conductivité thermique $\lambda^a$

FIGURE 2.2 – Variations des paramètres thermiques de l'air en fonction de la température.

### 2.1.2 Méthode de filtrage sur cycles stabilisés

#### a Estimation des coefficients d'échange convectif

La géométrie intérieure du RST est idéalisée par des tubes lisses en convection forcée. Il est alors possible de calculer de façon approchée le coefficient d'échange convectif sur les parois internes $h_{\text{int}}$ en fonction du débit d'air (lui-même étant une grandeur mesurée sur véhicule). En effet, définissons le nombre de Nusselt $N_u$, le nombre de Reynolds $R_e$ et le nombre de Prantl $P_r$, selon :

$$N_u = \frac{h_{\text{int}} D}{\lambda^a} \tag{2.1}$$

$$R_e = \frac{\rho^a U^a D}{\mu^a} \tag{2.2}$$

$$P_r = \frac{c_p^a \mu}{\lambda^a} \tag{2.3}$$

où $D$ est le diamètre du tube et $U^a$ la vitesse du flux d'air. Le produit $\rho^a U^a$ représente le débit d'air massique $Q^a$. Le cas du tube court (rapport diamètre sur longueur $L$ inférieur à 60) en régime turbulent donne une approximation du nombre de Nusselt [47] :

$$N_u = 0.021\ {R_e}^{0.8}\ {P_r}^{0.43} \left(1 + \left(\frac{D}{L}\right)^{0.7}\right) \tag{2.4}$$

Cette formule permet d'évaluer la valeur du coefficient d'échange convectif $h_{\text{int}}$ en fonction des points du débit massique et de la température des gaz intérieurs :

$$h_{\text{int}}(Q^a, T) = 0.021\ \frac{\lambda^a(T)}{D} \left(\frac{Q^a D}{\mu^a(T)}\right)^{0.8} \left(\frac{c_p^a(T)\mu^a(T)}{\lambda^a(T)}\right)^{0.43} \left(1 + \left(\frac{D}{L}\right)^{0.7}\right) \tag{2.5}$$

Par ailleurs, le coefficient convectif sur les parois extérieures du raccord de sortie du turbo est évalué selon une formule empirique dépendant de la vitesse du véhicule en km/h [1] :

$$h_{\text{ext}} = 0.02202\ V_{\text{véhicule}} + 5.6278\ (\text{en W.K}^{-1}\text{m}^{-2}) \tag{2.6}$$

Pour résoudre l'équation de la chaleur sur le RST, il suffit donc de connaître le débit d'air interne ainsi que la température des gaz internes et la température sous capot.

1. Cette formule est déterminée à partir de la simulation des écoulements sous capot pour différents points de fonctionnement stabilisés, à l'aide du logiciel FLUENT (source : service de calculs thermiques PSA).

### b Validation d'une approche unidimensionnelle

Nous avons comparé, sur les différents points de fonctionnement stabilisés, les résultats fournis par un calcul thermique tridimensionnel complet du RST avec des calculs unidimensionnels réalisés avec MATLAB®. Le calcul 1D est simplement la résolution de l'équation de la chaleur en régime transitoire pour $x \in [0,\ e]$ avec des conditions aux limites en convection forcée. Les points de fonctionnement stabilisés correspondent à des vitesses de 50 km/h et 90 km/h, à une situation de poids total roulant en charge (PTR2), et à un véhicule lancé à sa vitesse maximale $V_{max}$. L'intérêt de travailler sur des points de fonctionnement particuliers est que les coefficients de convection $h_{int}$ et $h_{ext}$, la température des gaz internes ainsi que la température sous capot sont connus grâce à des calculs 3D couplés mécanique des fluides/thermique, réalisés avec le logiciel FLUENT, et validés par des mesures en soufflerie. Les données d'entrée du calcul thermique 1D ou 3D sont donc les plus fiables possible.

Le calcul 3D (voir figure 2.3) montre que la paroi du RST présente un champ thermique assez homogène, ce qui justifie l'introduction d'un modèle 1D pour calculer la température de paroi. Par ailleurs, on constate que les gradients thermiques dans l'épaisseur sont faibles. Nous pouvons ainsi définir une température matière unique, représentative de la température du PA66-GF35 sur la paroi du RST, sur toute son épaisseur.

La comparaison entre le résultat 3D et le calcul 1D, présentée sur la figure 2.4, montre tout d'abord la validité du modèle 1D pour prédire la température matière (température à cœur). Nous constatons également la forte inertie thermique du RST, conséquence de la faible conduction thermique du PA66-GF35.

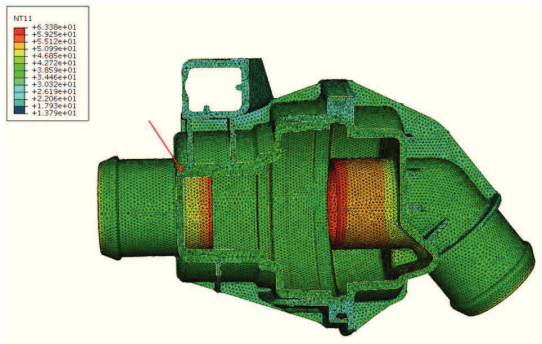


FIGURE 2.3 – Calcul thermique 3D du RST avec ABAQUS®, champ stabilisé sous chargement PTR2. La flèche indique le point de post-traitement de la température pour la comparaison au modèle 1D.

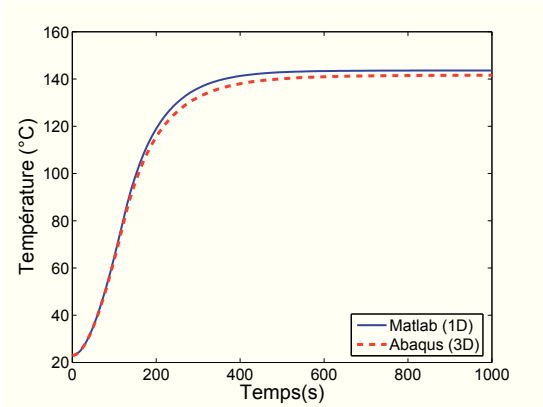



FIGURE 2.4 – Comparaison des montées en température à cœur calculées avec ABAQUS® (3D) ou MATLAB® (1D). Le chargement thermique appliqué est une rampe sur 120 s, suivi d'un maintien à PTR2.

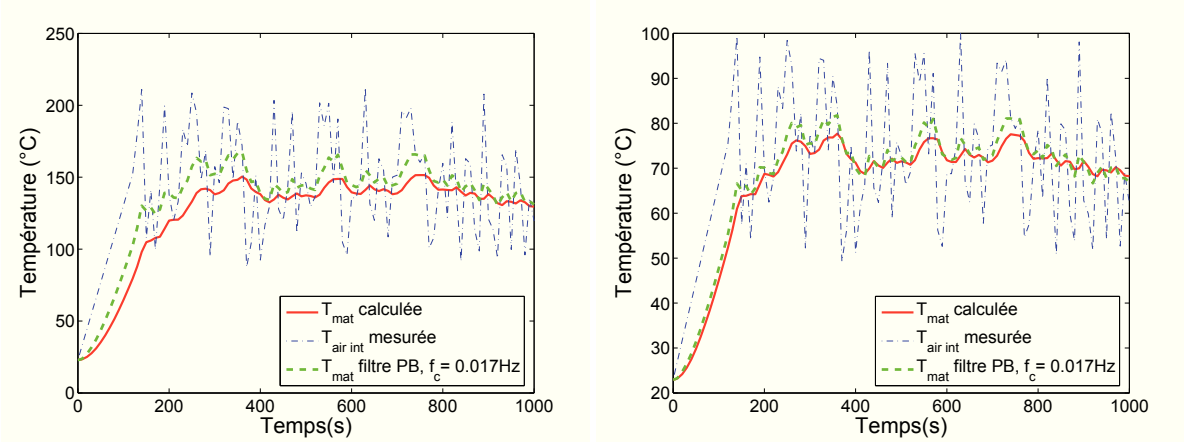
### c Filtrage du signal de température des gaz internes

Nous avons constaté que la température matière est essentiellement pilotée (dans le cas des chargements stabilisés étudiés) par la température des gaz internes (gaz du circuit d'admission en sortie du turbo). Nous proposons donc une estimation de la température matière à partir uniquement d'un traitement de ce signal.

L'inertie thermique importante du matériau de l'étude, conjuguée au faible gradient thermique dans l'épaisseur et à la faible sensibilité des grandeurs physiques à la température, permet de proposer une méthode de filtrage fondée sur le temps caractéristique de diffusion, défini par :

$$t_c = \frac{\rho c_p e^2}{\lambda} \sim 57 \text{ s} \tag{2.7}$$

Nous avons donc implémenté un filtre passe-bas, de fréquence de coupure $f_c$ égale à l'inverse du temps caractéristique de diffusion, et nous avons comparé sur des cas simples (température des gaz internes oscillant autour des points de fonctionnement stabilisés après phase de montée) le résultat du calcul 1D avec le filtrage de la température des gaz. Les résultats présentés sur la figure 2.5 montrent que cette méthode donne une très bonne estimation de la température matière. Par ailleurs, une recherche de la fréquence de filtrage optimale renvoie un résultat très proche de l'inverse du temps caractéristique de diffusion, ce qui permet de valider le choix de $f_c = 1/t_c$.




(a) Cas PTR2

(b) Cas $V_{max}$

FIGURE 2.5 – Comparaison entre les signaux de température matière pour deux cas de fonctionnement stabilisés. Le signal filtré à partir des températures des gaz internes (tirets verts) est une bonne approximation du signal issu du calcul thermique 1D (continu rouge).

### 2.1.3 Validation sur roulage en clientèle

Le filtrage de la température des gaz internes est intéressant pour une application rapide dans un cadre industriel, où l'on souhaite traiter rapidement de grands volumes de données. Notre objectif ici est de valider cette méthode sur des enregistrements en situation réelle, ce qui constitue un cas d'étude plus complexe que les points de fonctionnement stabilisés.

Il est possible d'évaluer la température sous capot à partir de la puissance du moteur $P$ en watts [2] :

$$T_{\text{sous capot}} \sim \max\left(-0.001\ P + 69.271\ ;\ 0.0009\ P + 40.178\right) \quad (\text{en } ^\circ\text{C}) \tag{2.8}$$

Les coefficients $h_{\text{int}}$ et $h_{\text{ext}}$ sont alors évalués à partir des équations 2.5 et 2.6. Le débit massique ainsi que la température des gaz internes sont interpolés à partir d'une cartographie de fonctionnement du

2. Cette formule empirique répond à notre besoin, mais possède néanmoins certaines limites. En effet, elle ne tient pas compte des variations de l'environnement climatique, ni de la vitesse du véhicule : l'estimation peut ainsi s'avérer assez grossière dans certaines cas.

moteur (régime, couple). Nous pouvons donc comparer l'estimation de la température matière à partir du modèle 1D avec le filtrage du signal de température des gaz internes, comme présenté sur la figure 2.6. Nous considérons que la méthode de filtrage fournit un bon ordre de grandeur de la température matière. Elle présente de plus l'avantage d'être toujours applicable, contrairement au modèle 1D qui nécessite de disposer d'équations empiriques difficiles à calibrer pour chaque architecture véhicule.

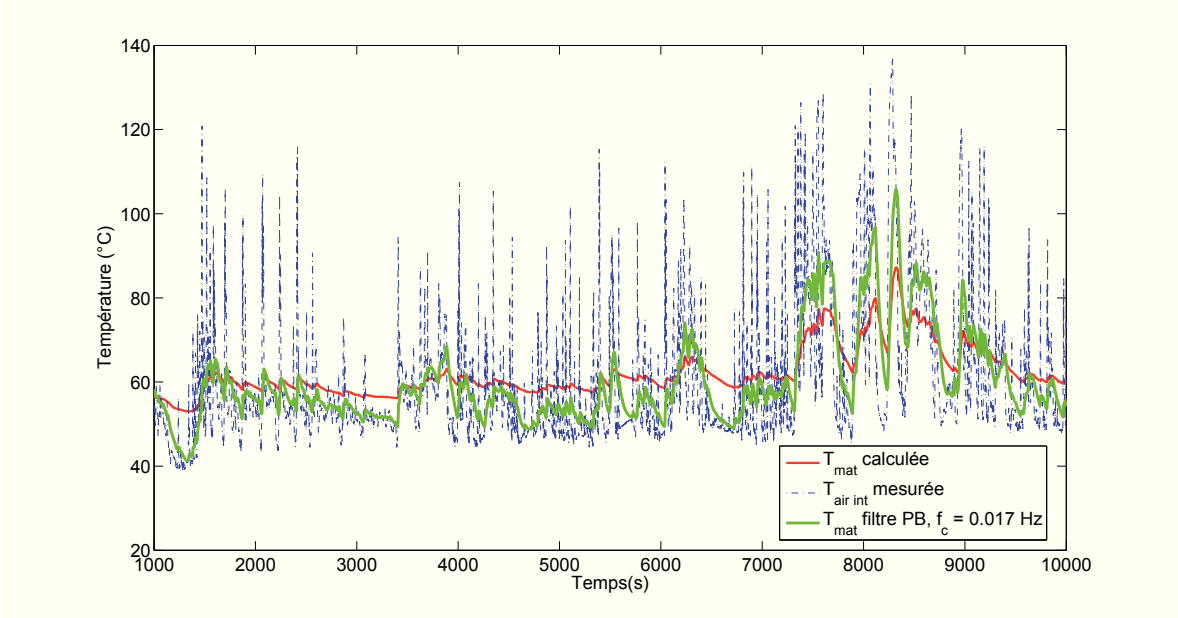



FIGURE 2.6 – Validation de la méthode de filtrage de la température des gaz en sortie du turbo sur un roulage mesuré en clientèle.

### 2.1.4 Discussion

Le traitement des mesures en clientèle ainsi que la connaissance des points de fonctionnement stabilisés permettent de cerner le cadre de sollicitations thermiques du matériau de l'étude. Nous pouvons en conclure que si la température moyenne est située aux alentours de 60 à 80 °C, des pointes de températures jusqu'à 140 (voire 180 °C) sont rencontrées pour des cas sévères. Par ailleurs, la forte inertie thermique des pièces explique dans le cas de trajets courts, les pièces sont soumises à un régime transitoire et peuvent ainsi être sollicitées dans un domaine proche de la température ambiante. Il conviendra donc d'explorer le comportement du PA66-GF35 de l'étude sur une gamme de température suffisamment étendue pour couvrir l'ensemble des cas étudiés. En outre, il n'est pas possible de considérer que le matériau reste toujours en-deçà ou au-delà de sa température de transition vitreuse.

Ce travail a été conduit à partir de données provenant du constructeur valables pour le raccord de sortie du turbo. Néanmoins, les conclusions de cette analyse de sollicitations s'appliquent également au répartiteur d'air à l'admission, et d'une façon générale aux pièces du circuit d'admission d'air situées en aval du turbocompresseur.

Enfin, dans un souci de transparence, précisons qu'il est difficile de réunir des données industrielles pour mener à bien tous les calculs ci-dessus. Notamment, les formules empiriques sont en fait

calibrées pour une motorisation proche (DV6T), et les données de température des gaz internes en clientèle n'ont pas été enregistrées sur le véhicule MCV, mais sur un véhicule de gabarit proche, avec le même moteur. Les quelques approximations consenties ne remettent cependant pas en cause les résultats présentés.

## 2.2 Modèle thermo-hygrométrique

Le polyamide est un polymère très sensible à l'humidité, comme cela a été expliqué en section 1.2.4. Dans cette section, nous développons un modèle pour prédire la diffusion des molécules d'eau dans le réseau polymérique depuis le milieu extérieur. Nous adoptons une approche phénoménologique, c'est-à-dire que nous ne cherchons pas à quantifier les mécanismes réactionnels au niveau chimique, mais nous nous intéresserons à l'évolution de la teneur massique en eau dans la matrice polyamide du PA66-GF35.

Les données d'entrée du modèle sont le taux d'humidité dans l'air $\mathcal{H}$, défini comme le rapport de la pression partielle en eau sur la pression de vapeur saturante, la température du milieu extérieur et la température matière.

Nous ne modélisons pas le vieillissement hygrothermique, c'est-à-dire que nous considérons la diffusion de l'eau dans le réseau macromoléculaire en l'absence de réaction hydrolytique.

### 2.2.1 Modélisation de la diffusion de l'eau dans les thermoplastiques

La majorité des auteurs considèrent en première approximation que la diffusion des molécules d'eau dans la matrice polyamide (essentiellement dans sa phase amorphe) suit une loi de Fick activée thermiquement selon un mécanisme arrhénien [195]. La loi de Fick se traduit du point de vue global par la relation [51] :

$$\frac{M(t)}{M_\infty} \sim \frac{2A}{V}\sqrt{\frac{D(T)t}{\pi}} \tag{2.9}$$

où $M(t)$ est la masse de l'échantillon au cours du temps $t$, $M_\infty$ la valeur asymptotique en temps infini, $A$ la surface d'échange avec le milieu extérieur et $V$ le volume de l'échantillon. Cette loi permet une évaluation simple et rapide du coefficient de diffusion $D$ à température $T$ fixée.

Néanmoins, plusieurs auteurs considèrent que la loi de Fick doit être améliorée, avec par exemple une dépendance de $D$ à la concentration en eau [180] ou au temps [189] : on aboutit alors à des modèles pseudo-fickiens. De même, des processus non-fickiens tels que le modèle de Langmuir sont proposés pour simuler la diffusion des molécules [74, 142]. Ce modèle suppose qu'une partie des molécules sont fixées par le réseau tandis que l'autre est libre de diffuser, selon un mécanisme fickien.

Nous remarquons que de nombreuses études s'intéressent à des améliorations de la loi de diffusion en se focalisant sur l'évolution de la masse totale, à partir de l'écart entre la prise de masse expérimentale et la prédiction fournie par l'équation 2.9. Or, surtout dans le cas de structures minces (plaques, coques), il est évident que le choix des conditions aux limites conditionne fortement la cinétique de prise en eau, et donc également l'évolution de la masse totale en fonction du temps. Nous faisons ici le choix de conserver un modèle de diffusion fickien, mais en discutant de la modélisation des conditions aux limites.

### a Teneur en eau à l'équilibre

Avant de s'intéresser à la résolution du problème d'évolution de la teneur en humidité dans le cas général, il convient de connaître la solution stationnaire de ce problème. La concentration en eau $C^{\infty}_{\mathrm{H_2O}}(\mathcal{H})$ représente la concentration en eau[3] stabilisée d'un matériau exposé à un taux d'humidité ambiant $\mathcal{H}$ (exprimé en pourcents). Elle peut s'exprimer suivant une loi linéaire (loi de Henry) :

$$C^{\infty}_{\mathrm{H_2O}}(\mathcal{H}) = S \cdot p_{\mathrm{H_2O}} = \mathcal{H} \cdot \frac{p_s\, S}{100} \tag{2.10}$$

où $S$ représente la solubilité et $p_s$ la pression de vapeur saturante. Ces deux grandeurs sont activées thermiquement, selon des lois d'Arrhenius, et possèdent des énergies d'activation (notées resp. $E_a^S$ et $E_a^{p_s}$) proches en valeur absolue, et de signes opposés. Cette observation permet d'expliquer pourquoi la concentration à l'équilibre $C^{\infty}_{\mathrm{H_2O}}(\mathcal{H})$ est généralement considérée comme indépendante de la température, l'énergie d'activation globale $E_a^S + E_a^{p_s}$ étant faible [142].

D'après des données de fournisseurs de matières plastiques, la loi de Henry n'est plus valable dans le cas du polyamide 66 dès que le taux d'humidité ambiant dépasse 30 % ou 40 %. C'est la raison pour laquelle une loi puissance est également évoquée dans la littérature [195] :

$$C^{\infty}_{\mathrm{H_2O}}(\mathcal{H}) = a\mathcal{H}^b \tag{2.11}$$

$a$ (en %) et $b$ (sans dimension) sont les deux paramètres du modèle. $b$ est généralement supposé indépendant de la température, et nous négligeons ici la sensibilité éventuelle de $a$ aux conditions environnementales. Cette loi est en règle générale valable pour des taux d'humidité $\mathcal{H}$ allant jusqu'à 90 %. Notons que des modèles plus évolués (équation de Flory-Huggins, contribution du modèle de Langmuir [88]) peuvent être utilisés pour de fortes concentrations en eau (jusqu'à 10 %, cas des plastiques immergés sous pression), mais ces situations ne sont pas représentatives des conditions de vie en service. Dans la suite de nos travaux, nous choisissons donc la loi puissance pour exprimer la teneur en eau à l'équilibre.

### b Formulation des conditions aux limites

La première façon de modéliser les conditions aux limites est de considérer que la frontière du domaine d'étude (polymère au contact du milieu extérieur) est à l'équilibre avec le milieu ambiant. Formellement, cela revient à écrire des conditions de Dirichlet à la frontière du domaine $V$ :

$$C_{\mathrm{H_2O}} = C^{\infty}_{\mathrm{H_2O}}(\mathcal{H}) \quad \text{sur } \partial V \tag{2.12}$$

Comme le font remarquer Seferis et al. [180], une telle modélisation des conditions aux limites implique une adaptation immédiate de l'interface plastique/air au taux d'humidité ambiant. Cette hypothèse n'est pas physiquement très réaliste, et l'auteur propose d'introduire un temps de retard dans le modèle. De façon équivalente, nous proposons une condition aux limites mixte à la place de la condition de Dirichlet. Cette modélisation relie le flux de molécules d'eau à la différence entre la concentration au bord et la concentration d'équilibre. Cette formulation est analogue à l'écriture de conditions aux limites en convection forcée pour un problème thermique :

$$\frac{\partial C_{\mathrm{H_2O}}}{\partial n} \equiv \underline{\nabla C_{\mathrm{H_2O}}} \cdot \underline{n} = -h_{\mathrm{RH}} \left( C_{\mathrm{H_2O}} - C^{\infty}_{\mathrm{H_2O}}(\mathcal{H}) \right) \quad \text{sur } \partial V \tag{2.13}$$

3. La concentration en eau, ou teneur en eau, est une concentration massique, exprimée en %. Dans le cas d'un volume homogène, dont la masse est $M$ en présence d'humidité et $M_0$ à l'état sec, on définira ainsi $C_{\mathrm{H_2O}} = 100(M - M_0)/M_0$.

$\underline{n}$ est la normale extérieure au domaine d'étude, et $h_{\mathrm{RH}}$ est appelé coefficient convectif hygrométrique. Si l'on fait le choix de conserver un modèle de diffusion fickien simple, cette formulation mixte permet de mieux corréler données expérimentales et simulation numérique qu'une condition de Dirichlet. Cette constatation a été faite à partir de données expérimentales pour des polyamides 66 (voir la figure 2.8). La formulation mixte est donc adoptée pour le PA66-GF35 de l'étude.

### c Problème couplé thermo-hygrométrique

Le problème à résoudre est un problème couplé puisque nous avons vu que la température influe sur la diffusion de l'eau. Nous supposons que nous avons un couplage faible en faisant l'hypothèse que les coefficients thermiques sont indépendants de la concentration locale en eau dans le polymère : le coefficient de diffusion thermique $\lambda/\rho c_p$ est supposé indépendant de $\mathcal{H}$. Les équations locales du problème sont les suivantes :

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda(T) \frac{\partial}{\partial \underline{x}} \cdot \frac{\partial T}{\partial \underline{x}} = \lambda(T) \Delta T \tag{2.14}$$

$$\frac{\partial C_{\mathrm{H_2O}}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \underline{x}} \cdot \left( D(T, \underline{x}) \frac{\partial C_{\mathrm{H_2O}}}{\partial \underline{x}} \right) \quad \text{dans } V \tag{2.15}$$

Par ailleurs, il est communément admis que le coefficient de diffusion est plus élevé lors d'un régime de prise en eau ($\partial C_{\mathrm{H_2O}}/\partial t > 0$) en comparaison avec un régime de séchage ($\partial C_{\mathrm{H_2O}}/\partial t < 0$)[4]. Nous supposons par contre que les énergies d'activation sont identiques dans les deux cas. On écrira donc :

$$D(T) = D_1 \exp\left( -\frac{E_a}{R} \left( \frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right) \right) \quad \text{en prise en eau} \tag{2.16}$$

$$D(T) = D_2 \exp\left( -\frac{E_a}{R} \left( \frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right) \right) \quad \text{en séchage} \tag{2.17}$$

Nous choisissons la température de référence $T_0$ égale à la température ambiante. Les conditions aux limites s'écrivent :

$$-\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial n} = h(T_{air}, U_{air}) \cdot (T - T_{air}) \tag{2.18}$$

$$-\frac{\partial C_{\mathrm{H_2O}}}{\partial n} = h_{\mathrm{RH}} \left( C_{\mathrm{H_2O}} - a\, \mathcal{H}^b \right) \quad \text{sur } \partial V \tag{2.19}$$

Pour simplifier, on postule que le coefficient $h_{\mathrm{RH}}$ ne dépend pas des conditions environnementales.

### d Identification des coefficients du problème

La construction du problème thermo-hygrométrique couplé nécessite l'introduction d'un certain nombre de paramètres ajustables qu'il faut identifier. Nous disposons de certaines données fournisseur sur un polyamide 66 non chargé. Par ailleurs, nous faisons l'hypothèse que les fibres de verre ne modifient pas la cinétique de diffusion de l'eau : le PA66-GF35 est donc supposé avoir la même teneur en eau qu'un polyamide 66 non chargé, à un facteur 0.65 près puisque les fibres de verre ne peuvent absorber d'eau.

4. La différence entre les valeurs de $D$ lors de la prise en eau ou du séchage peuvent également être interprétées comme la conséquence d'une sensibilité de $D$ à la concentration en eau. Merdas et al. [142] montrent en effet une décroissance de $D$ en fonction de $C_{\mathrm{H_2O}}$.

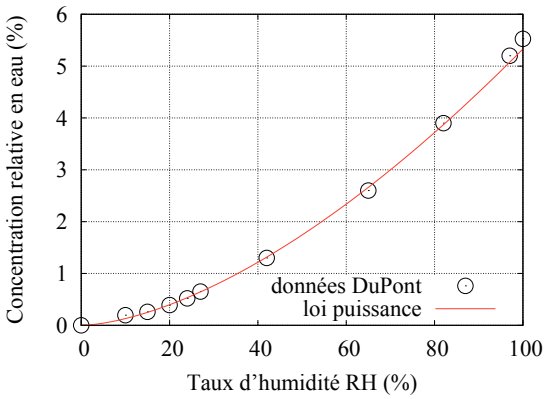
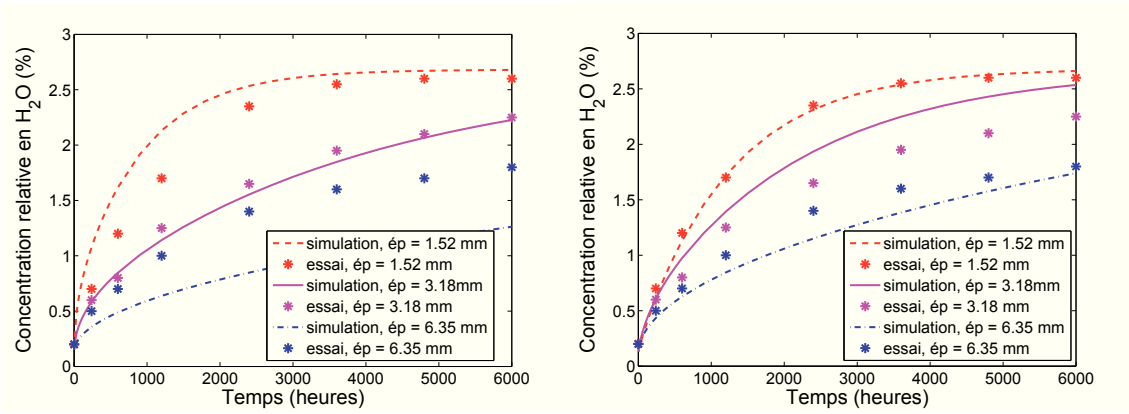



FIGURE 2.7 – Identification de la loi puissance pour la concentration d'équilibre en eau en fonction du taux d'humidité ambiant à 23 ˚C (PA66-GF35 de l'étude).




(a) Condition aux limites de Dirichlet (Eq. 2.12) (b) Condition aux limites mixte (Eq. 2.13)

FIGURE 2.8 – Prise en eau d'un PA66 exposé à 23 ˚C en environnement humide ($\mathcal{H}$ = 50 %), pour des plaques de différentes épaisseurs. (a) Identification de $D$ avec une condition aux limites de Dirichlet, (b) identification de $D$ et $h_{\mathrm{RH}}$ avec une formulation mixte.

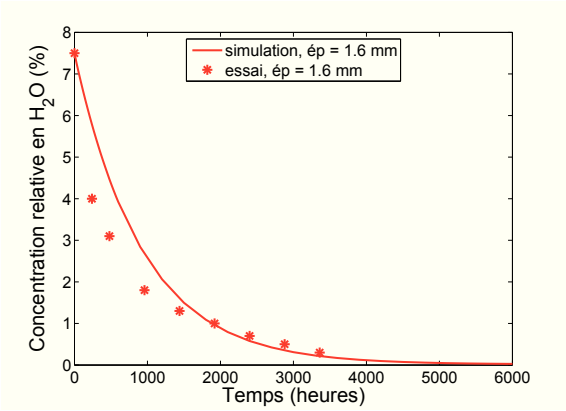



FIGURE 2.9 – Séchage d'un PA66 à 23 ˚C en environnement sec, à partir de conditions sursaturées.

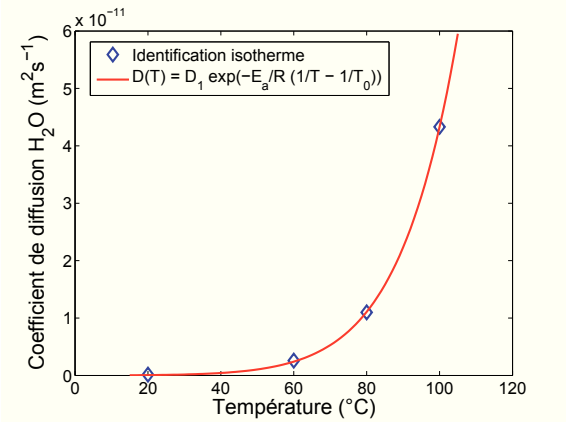



FIGURE 2.10 – Identification de l'énergie d'activation thermique du coefficient de diffusion de l'eau, en régime de prise en eau.

**Paramètres de la concentration d'équilibre**

La première étape est de déterminer la concentration d'équilibre en fonction de $\mathcal{H}$. La figure 2.7 présente l'identification de la loi puissance pour le PA66-GF35 de l'étude à partir de mesures expérimentales. Remarquons que l'identification de ces coefficients sur d'autres grades de polyamide 66 (provenant d'un autre fournisseur matière) permet de mettre en évidence une sensibilité assez forte à la formulation chimique (adjuvants, etc).

**Coefficients de diffusion et de convection hygrométrique**

Des essais de suivi de la masse totale en fonction du temps pour différentes épaisseurs (prise en eau ou séchage) permettent de déterminer les coefficients de diffusion à 23 ˚C ainsi que le paramètre $h_{\mathrm{RH}}$, comme nous le voyons sur les figures 2.8b et 2.9. Le même type d'essais de prise en eau, réalisés à différentes températures, permettent d'identifier l'énergie d'activation de la loi d'Arrhenius, et confirment les valeurs du coefficient $D_1$ à température ambiante (voir figure 2.10).

Le tableau 2.2 récapitule les valeurs identifiées des différents coefficients du modèle. Par ailleurs, les ordres de grandeur de ces valeurs sont cohérents avec les données de la littérature pour différents polyamides 66. Nous pouvons donc estimer que les hypothèses émises au cours de la construction de ce modèle (indépendance de $a$ et $h_{\mathrm{RH}}$ aux conditions environnementales, dépendance de $D$ à $C_{\mathrm{H_2O}}$ réduite à une description à deux régimes prise/perte en eau) n'affectent pas la pertinence physique du modèle, ce que confirmera la section suivante.

Par ailleurs, notons qu'une identification avec une condition aux limites de Dirichlet renvoie une valeur de $D_2$ similaire, mais $D_1$ est alors égal à $0.072\times10^{-12}$ m$^2$.s$^{-1}$, ce qui est faible par rapport aux données de la littérature, et surtout n'est pas cohérent avec le fait que la cinétique de prise en eau soit plus rapide que celle de perte.

### 2.2.2 Validation du modèle de diffusion de l'eau

L'identification des paramètres du modèle couplé thermo-hygrométrique permet d'envisager une confrontation aux mesures expérimentales pour des conditions non stationnaires. Dans cette partie,

| Grandeur physique | Symbole | Unité | Valeur |
|---|---|---|---|
| Coefficient de la loi de $C^{\infty}_{\mathrm{H_2O}}$ | $a$ | % | $3.17\times10^{-3}$ |
| Exposant de la loi de $C^{\infty}_{\mathrm{H_2O}}$ | $b$ | - | 1.61 |
| Diffusion en prise en eau à 23 ˚C | $D_1$ | $\mathrm{m^2.s^{-1}}$ | $0.155\times10^{-12}$ |
| Diffusion en séchage à 23 ˚C | $D_2$ | $\mathrm{m^2.s^{-1}}$ | $0.114\times10^{-12}$ |
| Convection hygrométrique | $h_{\mathrm{RH}}$ | $\mathrm{m^{-1}}$ | $2.23\times10^{3}$ |
| Énergie d'activation | $E_a$ | $\mathrm{kJ.mol^{-1}}$ | 65.6 |

TABLE 2.2 – Valeurs des grandeurs physiques intervenant dans le calcul thermo-hygrométrique, pour le PA66-GF35 de l'étude.

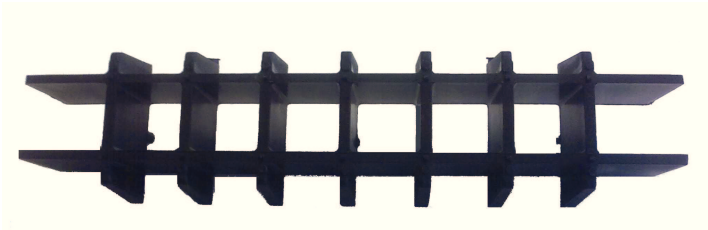


FIGURE 2.11 – Structure étudiée pour la validation du modèle thermo-hygrométrique. Dimensions approximatives : 25×6×3.5 cm, avec une épaisseur moyenne des nervures de 3.5 à 4 mm.

nous utilisons les résultats de pesées réalisées sur une mini-structure en PA66-GF35 [5], soumise à un chargement hygrothermique complexe en enceinte climatique (voir figure 2.11). Initialement à l'équilibre avec un taux d'humidité de 25 %, la pièce est exposée à un environnement $\mathcal{H}$=90 % et $T$=40 ˚C (RH90-T40) pendant trois semaines, puis à quelques jours de transition à RH70-T70, avant un séchage complet d'un mois et demi à 80 ˚C (RH0-T80), puis une reprise d'humidité en environnement RH70-T70 de deux semaines.

### a Résolution du modèle sur structure

Une modélisation de la mini-structure comme assemblage de coques (compatibles avec le modèle 1D développé sous MATLAB®) ne permet pas de décrire aisément la variation d'épaisseur des nervures, ni l'évolution de la teneur en eau dans les jonctions de nervures, qui jouent un rôle important du point de vue mécanique. Le modèle 1D avec lequel nous avons identifié les paramètres du modèle thermo-hygrométrique n'est donc plus suffisant pour l'analyse de la mini-structure.

La dépendance du coefficient de diffusion à la valeur de la concentration en eau explique qu'il faille résoudre les équations du problème à l'aide d'un solveur par éléments finis capable de prendre en compte des formulations variationnelles non communes. Nous avons donc implémenté les équations du problème dans FREEFEM++®, solveur 2D libre, dédié à l'enseignement et à la recherche. Nous ne nous intéressons qu'à une coupe de la pièce, le champ solution étant supposé indépendant de la cote $z$. Par ailleurs, nous supposons que l'équilibre thermique est atteint beaucoup plus rapidement que l'équilibre hygrométrique, ce qui permet de découpler complètement les équations du problème. Nous admettons ainsi que la structure présente un champ thermique homogène, égal à la température

5. Les données expérimentales de cette section sont issues d'une étude menée au sein du service "Peintures, Matériaux et Procédés" de PSA, à partir de pièces fournies par un autre fournisseur matière.

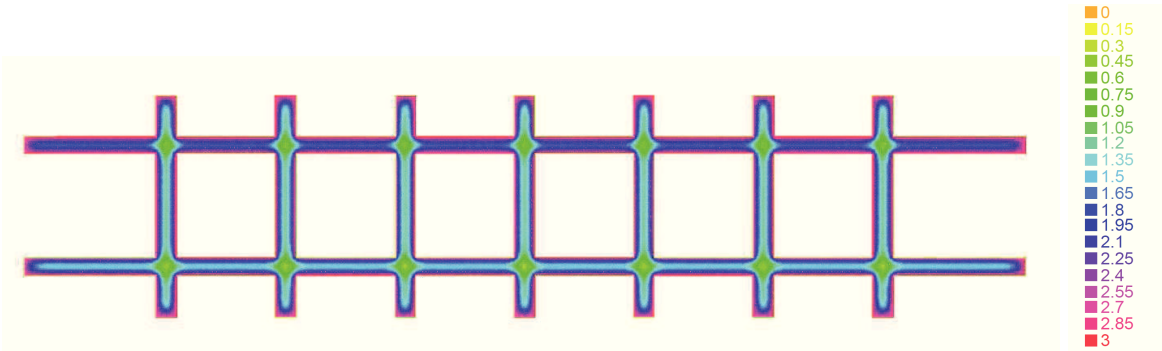



FIGURE 2.12 – Résultat d'un calcul par éléments finis sous FREEFEM++® sur la mini-structure, avec condition aux limites mixte. Dans cet exemple, on simule la prise en eau en environnement $\mathcal{H}$=70 %, $T$=70 °C pendant 5 jours à partir d'un matériau sec. Affichage de la teneur relative en eau (%).

de consigne. Cette hypothèse est justifiée en raison de la différence des temps caractéristiques de diffusion entre les deux problèmes (quelques minutes contre quelques jours ou semaines, selon la température).

En revanche, pour pouvoir décrire précisément les gradients d'humidité, le maillage est tel que 6 à 8 éléments triangulaires quadratiques (P2) sont présents dans l'épaisseur d'une nervure. Le problème est adimensionalisé pour s'affranchir au mieux des erreurs numériques : le champ inconnu est $u = u(\underline{\tilde{x}}, \tau)$ avec $u = C_{\mathrm{H_2O}}/\rho$, $\underline{\tilde{x}} = \underline{x}/e$ et $\tau = tD_1/e^2$. $\rho$ est la masse volumique du PA66-GF35, $e$ une épaisseur caractéristique du problème et $D_1$ le coefficient de l'eau de diffusion à 23 °C. Enfin, les pas de temps pour la résolution temporelle sont raffinés aux changements de régime (prise en eau, séchage).

La figure 2.12 présente une solution issue de la simulation de la structure pour un chargement simple de prise en eau. Nous pouvons constater le fort gradient d'humidité entre les bords libres de la structure, à l'équilibre avec l'environnement extérieur, et le cœur. Cet effet est particulièrement marqué au niveau des intersections des nervures, où l'humidité n'a pas eu le temps de diffuser. A l'inverse, un calcul de séchage à partir de conditions humides donne une solution où la structure est quasiment sèche, donc rigide, avec des "rotules" humides aux intersections des nervures, qui ont donc un comportement davantage ductile.

Ce calcul de diffusion de l'eau, activée par la température, permet de soulever la question de la nécessité éventuelle d'intégrer les gradients d'humidité dans le calcul de la réponse mécanique d'une structure, lorsque cette dernière est exposée à des environnements hygrothermiques variables. Par ailleurs, il serait intéressant de mesurer à l'aide de techniques expérimentales (micro-dureté sur matériau non chargé, titrage de Karl-Fisher, etc.) les gradients d'humidité sur pièce, et de les comparer aux gradients prédits par le modèle.

### b Validation pour un chargement hygrothermique complexe

L'évolution de la teneur globale en eau de la pièce étudiée est comparée à la variation relative de masse mesurée au cours du chargement (voir la figure 2.13). De façon à illustrer l'influence du choix des conditions aux limites, nous avons réalisé deux simulations numériques, tout d'abord avec une formulation de Dirichlet (Eq. 2.12) puis avec une formulation mixte (Eq. 2.13) sur la frontière $\partial V$. En effet, les conditions en enceinte climatique ventilée sont potentiellement différentes des conditions en

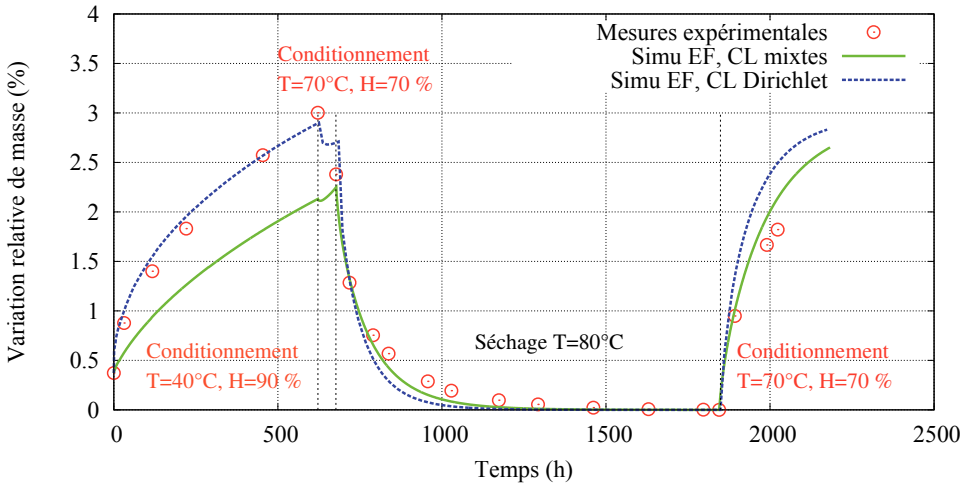



FIGURE 2.13 – Validation sur mini-structure du modèle thermo-hygrométrique pour un chargement complexe. Les mesures expérimentales sont comparées aux résultats des simulations numériques par éléments finis, avec les deux modélisations possibles des conditions aux limites, mixte ou Dirichlet.

atmosphère "statique".

Nous mettons ainsi en évidence la différence de réponse thermo-hygrométrique, avec notamment un système plus rapidement sensible aux variations de l'environnement dans le cas de la formulation de Dirichlet. Par ailleurs, il semble que cette modélisation des conditions aux limites soit plus en accord avec les mesures expérimentales que la formulation mixte, en particulier lors de la première phase de conditionnement en environnement RH90-T40. Mais le fait de ne pas disposer du même grade que pour l'identification des paramètres ne permet pas de remettre en question le choix d'une formulation mixte. En effet, mis à part lors de la première phase du chargement (RH90-T40), les prédictions de la formulation mixte sont aussi bonnes, voire meilleures. Il est ainsi probable que l'erreur provienne d'une mauvaise calibration des coefficients $a$ et $b$ pour ce grade.

Néanmoins, quelle que soit la formulation, nous constatons une bonne corrélation (au moins qualitative) entre les résultats du modèle et les mesures expérimentales. En effet, au vu de la simplicité de notre modèle de diffusion, nous reproduisons les bons ordres de grandeur des variations de masse, avec les bonnes cinétiques. Nous jugeons donc le modèle capable de prédire une bonne estimation de la teneur en eau des pièces en PA66-GF35 au cours d'un chargement hygrothermique instationnaire, pour une gamme étendue de conditions $T$-$\mathcal{H}$.

### 2.2.3 Application du modèle thermo-hygrométrique au RST

Le modèle thermo-hygrométrique présenté dans cette section permet de simuler les conditions de vie en service sur véhicule. La géométrie étudiée est une coque d'épaisseur 2.5 mm, permettant d'idéaliser la paroi du raccord de sortie du turbo évoqué lors du problème thermique. Nous considérons que la face interne du RST est exposée aux gaz intérieurs (dans le circuit d'admission), et la face externe à l'ambiance sous capot. Cette fois-ci, nous utilisons le modèle couplé avec l'équation de la chaleur et l'équation de la diffusion de l'eau, la résolution spatiale étant uni-dimensionnelle.

### a Cas d'étude

Nous choisissons d'étudier le cas d'une personne prenant sa voiture le matin et le soir tous les jours de la semaine pour de courts trajets (d'une vingtaine de minutes). Ces trajets sont des mixages de conditions correspondant aux points de fonctionnement stabilisés (route, ville, autoroute, montagne), ce qui influe sur les températures des gaz internes ainsi que sur les coefficients de convection thermique ($h_{\text{int}}$ et $h_{\text{ext}}$). Le taux d'humidité ambiant varie sur la semaine (avec une plage de variation représentative du climat tempéré français), tandis que la température ambiante suit des variations jour/nuit typiques d'un mois de printemps. Ce cas d'étude n'est pas un client moyen au sens statistique, mais se veut représentatif d'un usage courant en France métropolitaine.

Par ailleurs, nous avons ajouté deux événements "exceptionnels" pour étudier l'influence de conditions environnementales moins fréquentes. Tout d'abord, nous simulons un long trajet autoroutier sous la pluie (trajet Paris-Brest en jour 26), puis un trajet de quelques heures en montagne avec un taux d'humidité ambiant très faible (traversée de la Corse en jour 46).

### b Détermination du taux d'humidité dans le circuit d'admission

Les gaz dans le circuit d'admission sont supposés présenter la même pression partielle en eau que dans le milieu ambiant. Selon la formule de Rankine (équivalente à une loi d'Arrhenius) :

$$\ln(p_s) = 13.7 - \frac{5120}{T} \tag{2.20}$$

avec $T$ la température absolue (en kelvins) et $p_s$ la pression de vapeur saturante de l'eau (en atmosphère). On peut ainsi déterminer le taux d'humidité dans le circuit d'admission d'air à partir des conditions extérieures lorsque le moteur est en fonctionnement, selon :

$$\mathcal{H}_{\text{int}} = \mathcal{H}_{\text{ext}} \cdot \exp\left(5120\left(\frac{1}{T_{\text{int}}} - \frac{1}{T_{\text{ext}}}\right)\right) \tag{2.21}$$

Lors de conditions de roulage standard, la température des gaz à l'admission $T_{\text{int}}$ est plus élevée que la température sous capot $T_{\text{ext}}$. Le taux d'humidité des gaz d'admission est donc beaucoup plus faible que le taux moyen mesuré sous capot, ce qui permet d'expliquer pourquoi les pièces après roulage présentent en règle générale une teneur en eau inférieure. En revanche, laisser son véhicule au repos active une reprise d'humidité au cours du temps (selon une cinétique plus lente).

### c Résultats

La figure 2.14 présente l'évolution de la concentration relative en eau de la paroi du RST au cours du temps. On constate des variations de la teneur moyenne en humidité d'assez forte amplitude. La figure 2.14c illustre que ces variations sont centrées autour d'une teneur moyenne de 0.60 %, ce qui correspond à un équilibre avec taux d'humidité ambiant d'environ 25 %, inférieur à la moyenne du taux d'humidité ambiant ($\mathcal{H}_{\text{ext}}$ = 50 %). Cette différence s'explique par le séchage lors des phases de fonctionnement moteur. En plus de cette variation temporelle de la teneur en eau, il faut également en souligner la forte variation spatiale, comme le montrent les figures 2.14a et 2.14b.

Le trajet exceptionnel sous la pluie est peu ressenti (jour 26) : la durée importante du temps de fonctionnement moteur est compensée par l'environnement fortement humide. En revanche, celui en conditions sèches (jour 46) engendre un séchage complet de la paroi du RST. Remarquons que les variations à cœur de la teneur en humidité sont lissées du fait de la lenteur des phénomènes de diffusion hygrométriques, en comparaison avec les variations moyennées sur l'épaisseur qui intègrent

plus directement les variations du taux d'humidité ambiant $\mathcal{H}_{\text{ext}}$. Notamment, il est plus facile de lire sur la figure 2.14c l'influence des périodes de fonctionnement moteur sur le séchage global de la pièce, tandis que la concentration à cœur (figure 2.14d) peut augmenter lors d'une phase de fonctionnement moteur. Nous mettons ainsi en évidence une conséquence de la durée importante du temps de diffusion de l'humidité, et donc l'effet retard sur la concentration à cœur.

Pour cette simulation de la vie en service, les résultats sont peu sensibles au choix de modélisation des conditions aux limites hygrométriques. Nous avons présenté le cas de conditions aux limites mixtes (faces interne et externe), mais une simulation avec des conditions aux limites de Dirichlet renvoie un résultat très proche. Cette faible sensibilité à la formulation des conditions aux limites, contrairement à ce qui a été observé lors des sections précédentes, peut s'expliquer par le type de chargement hygrothermique appliqué (longues plages de reprise en eau dépendant du taux d'humidité ambiant, entrecoupées de courts séchages), très différent des essais d'identification ou de validation.

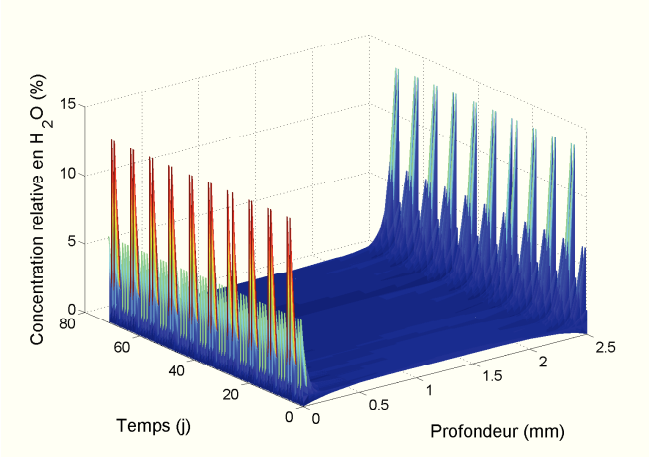
### 2.2.4 Discussion sur les conditions d'utilisation en service

Le développement du modèle couplé thermo-hygrométrique a permis de mettre en évidence plusieurs points essentiels. Tout d'abord, il apparaît que la teneur en humidité des pièces en PA66-GF35 situées sur le circuit d'admission d'air est très variable au cours du temps. Il est possible de rencontrer des pièces parfaitement sèches (suite à une longue phase de fonctionnement moteur en environnement ambiant sec). De même, sous certaines conditions (véhicule à l'arrêt sur une longue période en environnement humide – voir le cas de validation sur mini-structure), il est parfaitement concevable d'imaginer une forte reprise en humidité des pièces, qui ne reviendront dans leur état standard qu'après plusieurs semaines de fonctionnement en utilisation courante. Enfin, même sans évoquer ces conditions particulières, les gradients d'humidité sur pièce sont très importants, même pour un usage classique, et la teneur en humidité sur la peau du matériau (d'une épaisseur de 0.2 mm environ) est souvent très importante. Ceci est vrai malgré notre choix d'une formulation mixte des conditions aux limites hygrométriques.

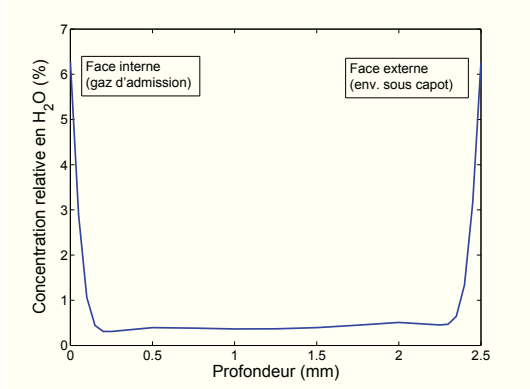
La teneur moyenne en humidité d'environ 0.6 % (soit un matériau à l'équilibre avec un taux d'humidité ambiant $\mathcal{H} \sim 20$ %) n'est donc pas représentative des conditions dans lesquelles sont sollicitées les pièces en PA66-GF35 qui nous concernent. En effet, les écarts types (spatiaux et temporels) sont trop importants pour ne pas mettre en évidence la nécessité d'étudier la réponse mécanique du matériau sur une large plage hygrométrique.

En outre, la différence entre les temps caractéristiques de diffusion de la chaleur et du taux d'humidité explique que les pièces puissent avoir une température élevée (supérieure à 80 ou 100 °C), et présenter une teneur en humidité importante pendant le fonctionnement du moteur, c'est-à-dire pendant qu'elles sont sollicitées mécaniquement. Il est donc nécessaire de disposer d'une enceinte climatique (thermo-hygrométrique) pour pouvoir recréer en laboratoire ces conditions de sollicitation.

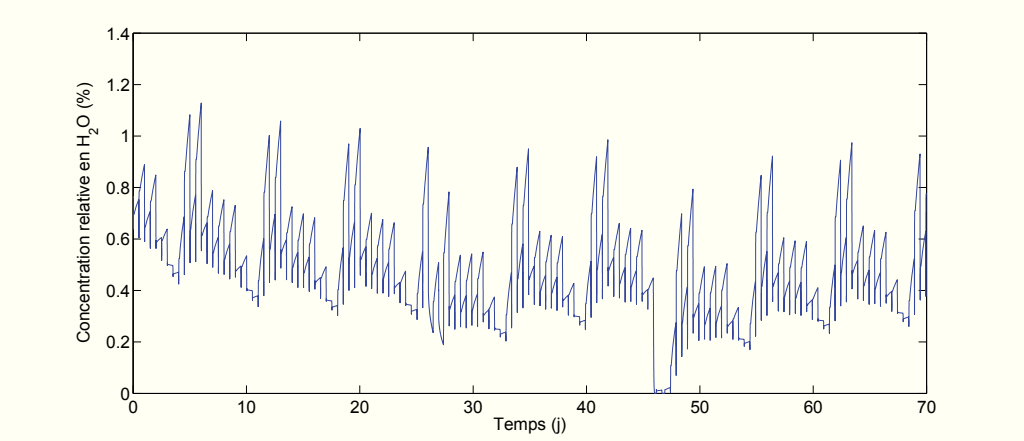
Les résultats de ce chapitre nous permettent donc de souligner la nécessité pour le concepteur de disposer de caractérisations mécaniques du comportement des polyamides renforcés en fibres de verre courtes sur une large plage de conditions environnementales. C'est la raison pour laquelle le modèle de comportement cyclique, qui sera présenté dans le chapitre suivant, doit être suffisamment riche pour décrire des phénomènes physiques observés sur une large gamme de conditions environnementales. De même, il semble que les caractérisations usuellement présentées dans la littérature (sur matériau sec ou conditionné RH50 à température ambiante, ou sur matériau sec à température élevée) soient insuffisantes pour rendre compte de l'ensemble des conditions de sollicitation rencontrées lors de la vie en service. Une campagne expérimentale appropriée doit donc être développée pour générer des résultats expérimentaux originaux.



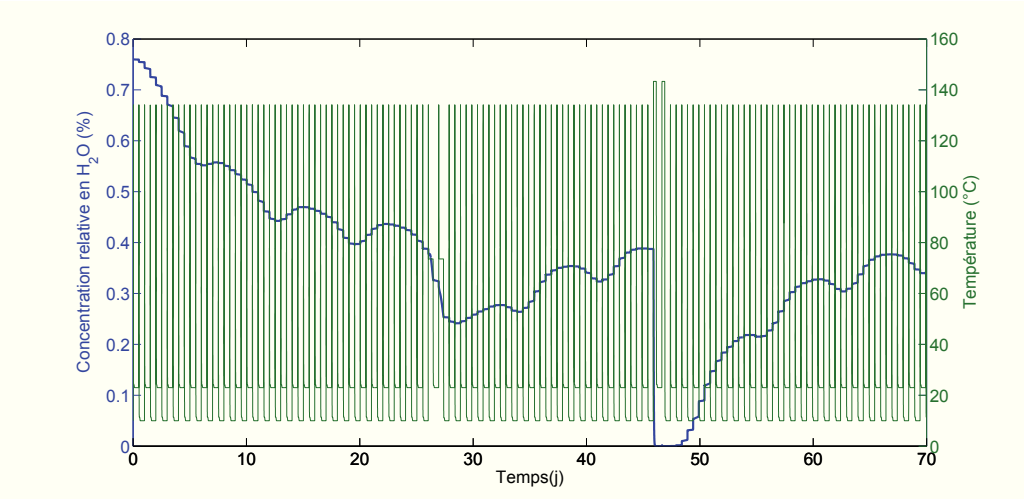

(a) Variations spatio-temporelles de la teneur en eau




(b) Profil d'humidité à la fin du jour 70




(c) Concentration en eau moyennée sur l'épaisseur




(d) Concentration en eau à cœur et température matière

FIGURE 2.14 – Simulation de l'évolution de la teneur en eau de la paroi du RST avec un chargement thermo-hygrométrique représentatif sur 10 semaines (trajets exceptionnels lors des jours 26 et 46).

# Chapitre 3

# Modélisation du comportement cyclique

## Sommaire


**3.1 Analyse mécanique** . . . . . **62**
3.1.1 Conditions expérimentales . . . . . 62
3.1.2 Essais de traction monotone . . . . . 63
3.1.3 Essais complexes . . . . . 64
3.1.4 Essais de traction répétée . . . . . 69
**3.2 Équations constitutives** . . . . . **70**
3.2.1 Formulation générale tridimensionnelle . . . . . 71
3.2.2 Expression dans le cas uniaxial . . . . . 74
3.2.3 Stratégie d'identification . . . . . 76
3.2.4 Validation en conditions standard . . . . . 79
**3.3 Sources de dissipation et auto-échauffement** . . . . . **82**
3.3.1 Formulation du modèle thermo-mécanique . . . . . 82
3.3.2 Application aux essais sur éprouvette . . . . . 83
**3.4 Discussion** . . . . . **86**
3.4.1 Comparaison avec des modélisations alternatives . . . . . 86
3.4.2 Pistes d'amélioration du modèle . . . . . 88
3.4.3 Prédiction des aires d'hystérèse . . . . . 89
3.4.4 Bilan . . . . . 89


Dans ce chapitre, nous présentons une base expérimentale réalisée sur des éprouvettes de traction en PA66-GF35, dans les conditions standard ($T$=23 °C, $\mathcal{H}$=50 %). L'analyse mécanique réalisée permet de mettre en évidence plusieurs caractéristiques physiques du comportement cyclique du matériau de l'étude, et sert de base pour la proposition d'un modèle phénoménologique. Une stratégie d'identification robuste permet de déterminer les paramètres des équations régissant le comportement cyclique non linéaire.

L'essentiel des résultats de ce chapitre a fait l'objet d'une publication dans la revue *International Journal of Plasticity* [123].

## 3.1 Analyse mécanique

### 3.1.1 Conditions expérimentales

#### a Moyens expérimentaux

Les essais de caractérisation du comportement cyclique ont été réalisés au LMBS (ENSTA Bretagne) sur une machine de traction hydraulique INSTRON® (modèle 1342). La déformation axiale est mesurée par un extensomètre à couteaux INSTRON® (modèle 2610-601, base de mesure 12.5±5 mm), et l'effort de traction est contrôlé par une cellule de 100 kN. En outre, les essais ont fait l'objet d'un suivi de température en surface, soit au moyen d'une caméra infra-rouge (modèle Phoenix MWIR 9705 produit par FLIR SYSTEMS®), soit au moyen d'un thermocouple. Enfin, les champs de déplacement ont également été enregistrés lors de certains essais ; un mouchetis est alors déposé sur les éprouvettes et l'acquisition est faite à l'aide d'une caméra optique (modèle Retiga 1300 de QImaging®). La figure 3.1 présente le montage expérimental complet.

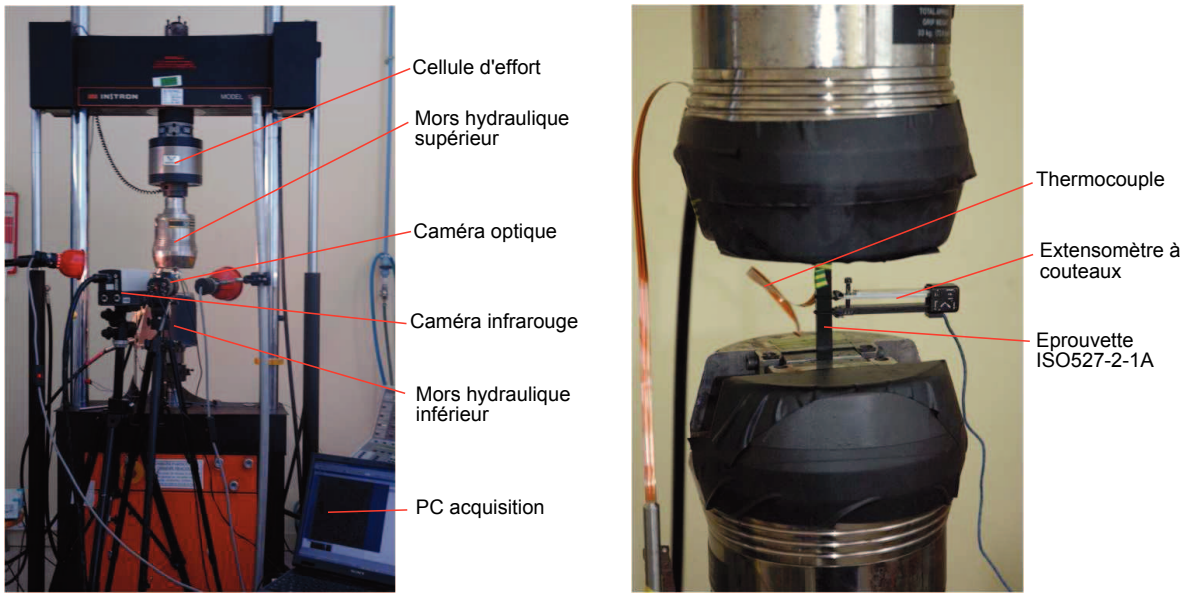



FIGURE 3.1 – Montage expérimental pour les essais de comportement en conditions standard.

#### b Éprouvettes

Les éprouvettes utilisées pour la caractérisation du comportement cyclique sont conformes à la norme ISO527-2-1A (voir plan en annexe A.1). Dans ce chapitre, puisque le comportement est caractérisé dans les conditions standard (RH50-T23), les éprouvettes sont conditionnées à l'équilibre avec un taux d'humidité $\mathcal{H}$=50 %, selon la norme ISO1110 [3]. Elles ont toutes fait l'objet d'un suivi de masse avant/après essai de façon à s'assurer que les variations de teneur en humidité sont négligeables lors d'un essai, et également dans le but de confirmer la bonne répétabilité du procédé d'injection.

Par ailleurs, du point de vue mécanique, ces éprouvettes sont considérées comme ayant des propriétés mécaniques isotropes transverses (avec $\underline{e}_1$ comme axe principal). Ceci est la conséquence du fort taux d'alignement des fibres dans la zone utile (voir annexe A.1), et a pu être vérifié notamment par une contraction identique selon les directions $\underline{e}_2$ et $\underline{e}_3$ lors d'essais de traction selon la direction

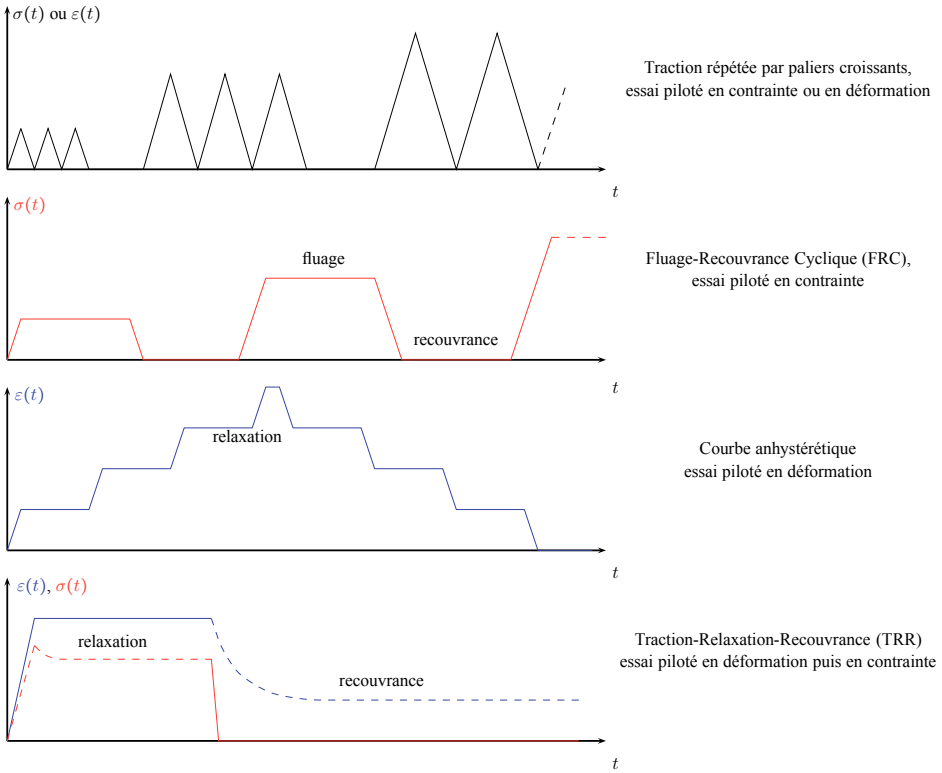



FIGURE 3.2 – Présentation de la base expérimentale développée pour l'identification du comportement cyclique.

$\underline{e}_1$. L'état initial est supposé libre puisque nous n'avons pas mis en évidence de contraintes résiduelles dues au procédé d'injection.

### c Base expérimentale

La figure 3.2 présente l'ensemble des essais réalisés pour la caractérisation du comportement cyclique non linéaire. En plus des essais classiques de traction monotone, des essais plus complexes mettent en jeu des histoires de chargement variées : pilotage en effort ou en déformation, vitesse de chargement variable, phases de relaxation, de recouvrance ou de fluage sur une large gamme de niveaux de chargement.

## 3.1.2 Essais de traction monotone

Nous avons tout d'abord réalisé des essais de traction monotone jusqu'à rupture, pilotés en effort [1]. Les vitesses de chargement couvrent quatre ordres de grandeur, depuis 2.5 MPa/s jusqu'à 2500 MPa/s, ce qui permet d'être représentatif des sollicitations rencontrées sur pièce. Les résultats de ces essais [2] sont présentés sur la figure 3.3. Nous constatons que la raideur à l'origine est très sensible à

1. La faible variation de section utile – inférieure à 3 % – permet de considérer que ces essais sont directement pilotés en contrainte.

2. Ces essais ont tous été (au moins) triplés, et présentent une bonne répétabilité expérimentale. Nous ne présentons ici qu'une seule courbe expérimentale par condition de chargement, qui correspond à une réponse moyenne.

la vitesse de chargement, ce qui est caractéristique d'une réponse viscoélastique. Puisque les effets viscoélastiques sont perceptibles sur la gamme de durée des essais réalisés, le temps caractéristique visqueux $\tau$ est de l'ordre de la seconde.

Le suivi de température (par caméra infra-rouge) est également source d'informations intéressantes. En effet, nous constatons une pente thermoélastique commune à toutes les vitesses de chargement. L'inflexion des courbes de température peut être imputée à la conversion du travail mécanique en chaleur, conséquence de la dissipation intrinsèque du matériau. Aux vitesses de chargement élevées, les phénomènes dissipatifs ne sont significatifs qu'à partir de niveaux de contraintes proches de la contrainte à rupture. A l'inverse, aux faibles vitesses de contrainte, l'inflexion est progressive jusqu'à une brusque élévation de température qui témoigne de la propagation d'une fissure à travers l'échantillon lors de la rupture finale. Le fait que les sources dissipatives soient dépendantes de la vitesse de chargement est cohérent avec une réponse viscoélastique à court terme du matériau. Il faut cependant prêter attention aux effets d'inertie thermique : le terme de diffusion dans l'équation de la chaleur contribue également au « retard » de l'élévation de température dans le cas des vitesses de chargement élevées. Nous y reviendrons en section 3.3.

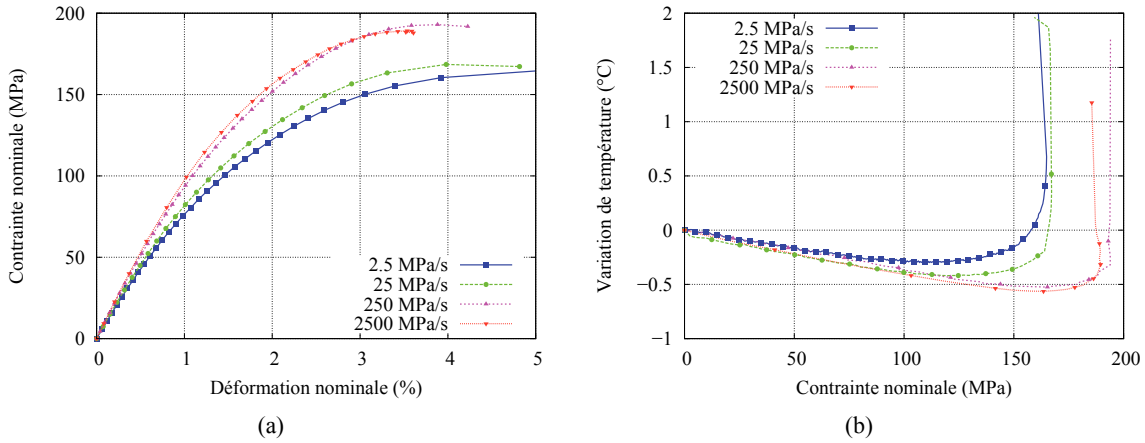



FIGURE 3.3 – Essais de traction monotone sur éprouvettes ISO527-2-1A, en conditions standard, réalisés à différentes vitesses de contraintes. (a) Réponse mécanique, (b) suivi de température.

### 3.1.3 Essais complexes

#### a Fluage-recouvrance cyclique (FRC)

Des essais de traction monotone ne sont pas suffisants pour analyser la réponse mécanique non linéaire d'un matériau. Comme Castagnet [37] et Rémond [176] ont pu le mettre en évidence pour des thermoplastiques semi-cristallins (renforcés ou non), l'étude de la réponse cyclique doit faire intervenir des histoires de chargement complexes, de façon à différencier les réponses des modèles envisageables, et à mieux comprendre l'influence des mécanismes de déformation mis en jeu.

La figure 3.4 présente le résultat d'un essai de fluage-recouvrance cyclique (FRC). Cet essai permet de mettre en évidence les caractéristiques de la réponse visqueuse à moyen terme. Aux faibles niveaux de contrainte, on constate que la réponse est viscoélastique, puisque la déformation est entièrement recouvrée. Le temps caractéristique viscoélastique est par contre supérieur à celui mis en évidence lors des essais de traction monotone, on parlera de réponse viscoélastique long terme, avec $\tau$

de l'ordre de la centaine de secondes cette fois-ci. Aux niveaux de contrainte imposée plus importants, une déformation résiduelle de plus en plus importante est mesurée à la fin de chaque palier de recouvrance. Il est cependant difficile de conclure, à ce stade, si cette déformation provient de l'activation de mécanismes plastiques irrécouvrables, ou plutôt de mécanismes visqueux recouvrables à très long terme. On retrouve la problématique soulevée par Pegoretti et al. [162] pour des semi-cristallins non chargés. Des essais complémentaires (TRR) permettront de répondre à cette question sans ambiguité.

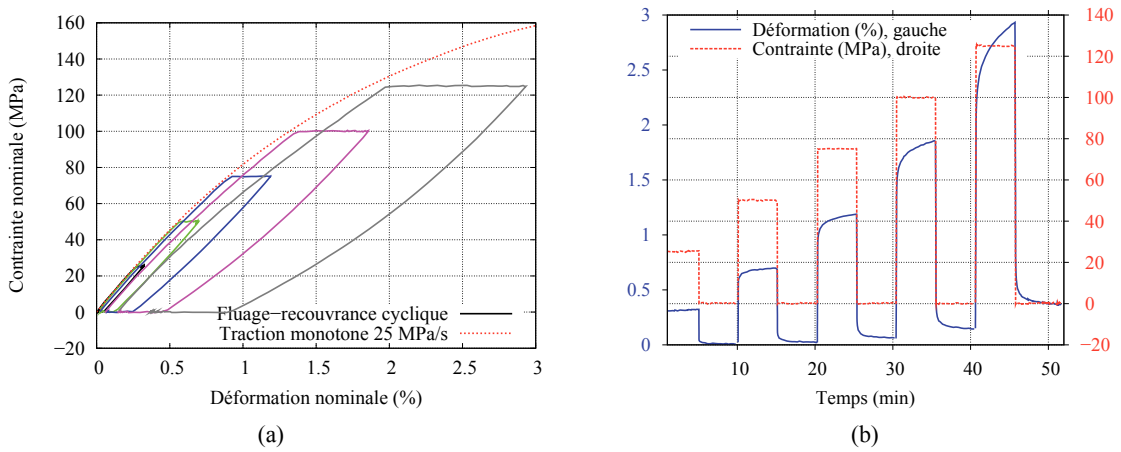



FIGURE 3.4 – Essai de fluage-recouvrance cyclique. Les vitesses de charge et de décharge sont de 25 MPa/s. (a) Contrainte fonction de la déformation axiale, (b) suivi temporel de la déformation et de la contrainte nominales.

### b Courbe anhystérétique

Une courbe anhystérétique (voir figure 3.5) est un trajet de charge/décharge en traction, interrompu par des paliers de relaxation. Cet essai est particulièrement intéressant pour l'étude de la réponse visqueuse à long terme en fonction d'une large gamme de déformation imposée. Les effets visqueux se manifestent sur une échelle de temps de l'ordre de quelques centaines de secondes, et dépendent davantage du niveau de contrainte appliquée que du niveau de déformation. En effet, les trois paliers de relaxation voisins de 140-150 MPa présentent une réponse similaire, tandis que la déformation imposée augmente graduellement (figure 3.5b).

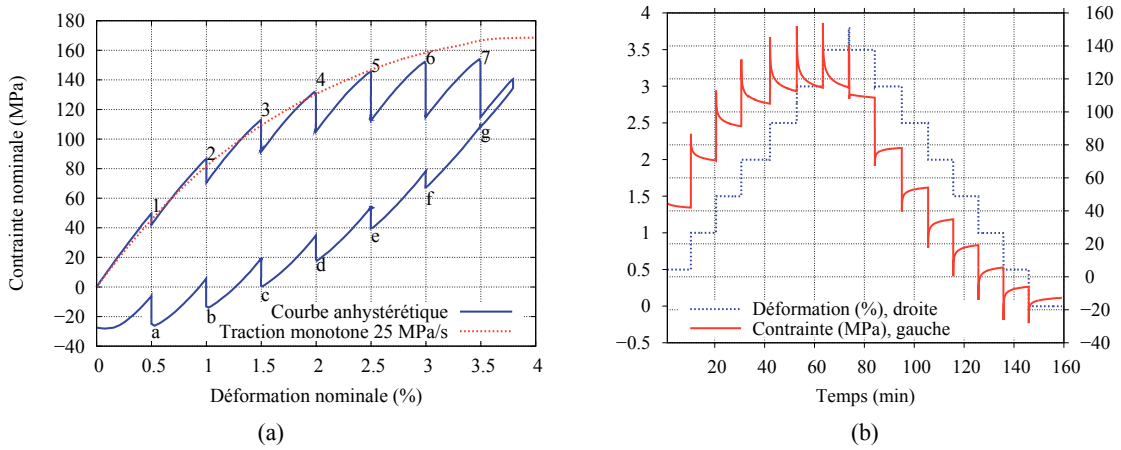
Par ailleurs, pour l'analyse des paliers de relaxation, nous pouvons faire l'hypothèse que la déformation est constituée d'une composante élastique et d'une composante inélastique, selon :

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E_e} + \varepsilon_{\text{in}} \tag{3.1}$$

où $E_e$ est le module élastique apparent [3]. Ceci permet de tracer l'évolution du taux de déformation inélastique $\dot{\varepsilon}_{\text{in}}$ en fonction de la contrainte appliquée pour chacun des paliers de relaxation (numérotés de 1 à 7 lors de la charge, et de g à a lors de la décharge), comme présenté sur la figure 3.6a. L'analyse des paliers de relaxation est intéressante car la contrainte y est décroissante [4], ce qui permet

3. $E_e$ est mesuré expérimentalement comme le module tangent initial sur la courbe $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ : il intègre donc l'effet viscoélastique court terme.

4. La contrainte est décroissante lors des paliers de relaxation en phase de charge, c'est l'inverse lors de la phase de décharge – on parlera alors de relaxation inverse.




(a) (b)

FIGURE 3.5 – Courbe anhystérétique. Les vitesses de charge et de décharge sont de de 0.25 %/s, et la durée des paliers de relaxation est de 15 min. (a) Courbe contrainte-déformation, (b) suivi temporel de la déformation et de la contrainte nominales.

de supposer en première approximation que l'évolution de la déformation inélastique est due à des phénomènes visqueux. Or, dans une hypothèse de réponse viscoélastique linéaire, la relation entre le taux de déformation inélastique et la contrainte appliquée est linéaire ; nous mettons donc ici en évidence le caractère fortement non linéaire de la réponse visqueuse. Cette non-linéarité est d'autant plus marquée que le niveau de contrainte appliquée est élevé.

Nous pouvons essayer de déterminer expérimentalement la forme de la loi d'écoulement visqueux, en introduisant la notion de contrainte visqueuse, notée $\sigma_v$. En effet, nous faisons l'hypothèse que seule une part de la contrainte active les mécanismes visqueux, ce qui correspond au modèle rhéologique proposé en figure 3.7. Le module visqueux $E_v$ permet de définir la contrainte visqueuse selon :

$$\sigma_v = \sigma - E_v \cdot \varepsilon_v \tag{3.2}$$

Nous pouvons alors tracer l'évolution du taux de déformation inélastique en fonction de la contrainte visqueuse de façon à réunir sur une courbe maîtresse les différentes portions de courbe correspondant à chaque palier de relaxation (voir figure 3.6b). Notre tentative ne permet pas d'aboutir à un résultat franchement concluant, ce qui laisse penser que notre modélisation doit être enrichie pour rendre compte de la réponse non linéaire. Néanmoins, comme nous l'avons tracé en trait continu sur la figure 3.6b, il semble qu'une relation inspirée de la loi d'Eyring :

$$\dot{\varepsilon}_{\text{in}} = A\left[\sinh\left(\frac{\sigma_v}{H}\right)\right]^m \tag{3.3}$$

puisse être pertinente pour décrire les effets non linéaires à des niveaux de contrainte modérés ou élevés. Notons en effet que l'introduction d'un exposant $m$ permet de modéliser le fait que l'écoulement visqueux soit négligeable à faible niveau de contrainte, sans pour autant introduire de seuil dans la formulation.

### c Traction-relaxation-recouvrance (TRR)

Les essais TRR (voir figure 3.8) sont les seuls de cette campagne à avoir été réalisés sur une machine de traction MTS (cellule d'effort 10 kN, extensomètre MTS) au LMS. Les paliers de re-

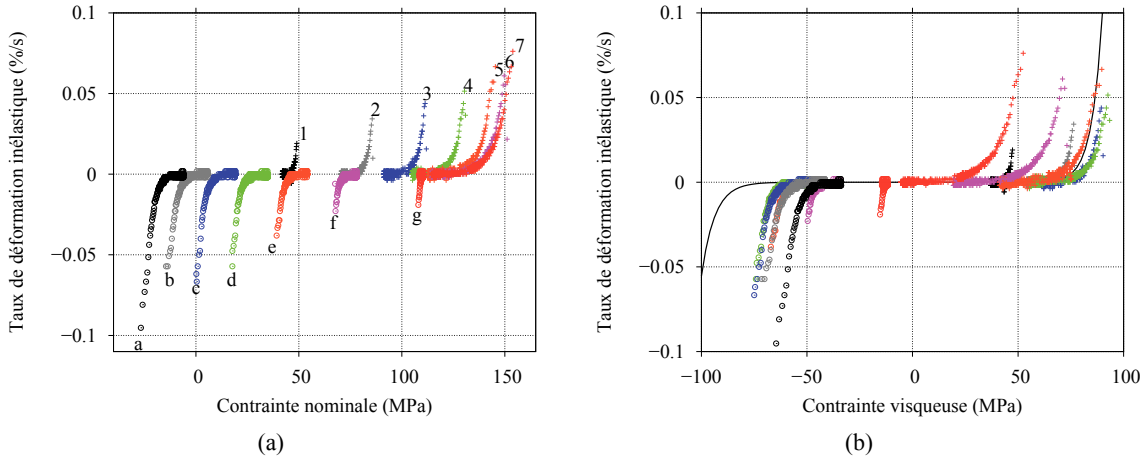



FIGURE 3.6 – Analyse des paliers de relaxation pour la courbe anhystérétique. (a) Taux de déformation inélastique fonction de la contrainte appliquée, (b) tentative de détermination expérimentale de la loi d'écoulement visqueux non linéaire en fonction de la contrainte visqueuse.

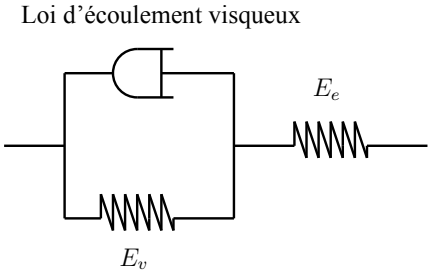



FIGURE 3.7 – Schéma rhéologique pour l'analyse des paliers de la courbe anhystérétique.

laxation sont bien corrélés à ceux de la courbe anhystérétique. Nous retrouvons de plus le fait qu'aux faibles niveaux de chargement, la déformation est entièrement recouvrée. En revanche, aux niveaux de contrainte plus élevés, une déformation résiduelle subsiste, même après de long temps de recouvrance (jusqu'à 10 h). Nous pouvons ainsi conclure à l'activation d'une déformation non recouvrable (du moins sur les échelles de temps pertinentes pour la modélisation mécanique). Cette déformation est activée au-delà d'un seuil apparent (formulé en contrainte) $\sigma_0$, et son évolution peut être décrite à l'aide du formalisme de la plasticité indépendante du temps. Par exemple, la loi d'écrouissage cinématique d'Armstrong-Frederick [9]

$$X = \frac{C}{\gamma}\left(1 - e^{-\gamma\varepsilon_p}\right) \tag{3.4}$$

relie la déformation résiduelle « plastique » à une contrainte de rappel $X$. Pour un chargement uniaxial, $X$ est simplement la différence entre la contrainte appliquée $\sigma$ et le seuil de plasticité apparent $\sigma_0$. $C$ (en MPa), $\gamma$ (-) et $\sigma_0$ sont alors trois paramètres du modèle, déterminés par moindres carrés à partir des données expérimentales. Nous choisissons de formuler $X = \sigma_{\text{relax}} - \sigma_0$ à partir de la contrainte mesurée à la fin du palier de relaxation, tandis que $\varepsilon_p$ est évalué à la fin du palier de recouvrance. Chaque essai TRR fournit donc un point dans la figure 3.9. Il est possible, de façon similaire, d'analyser la courbe anhystérétique et l'essai FRC pour générer davantage de points expérimentaux. Dans le cas de l'essai

FRC, la contrainte relaxée est égale à la contrainte appliquée lors des phases de fluage. Le fait que les phases de recouvrance ne durent que cinq minutes rend plus difficile l'extrapolation de la déformation résiduelle, ce qui peut expliquer une certaine incertitude dans les résultats. Néanmoins, nous montrons expérimentalement que des mécanismes d'écrouissage cinématique non linéaires (Eq. 3.4) permettent de bien décrire l'évolution de la déformation résiduelle lors d'un chargement cyclique.

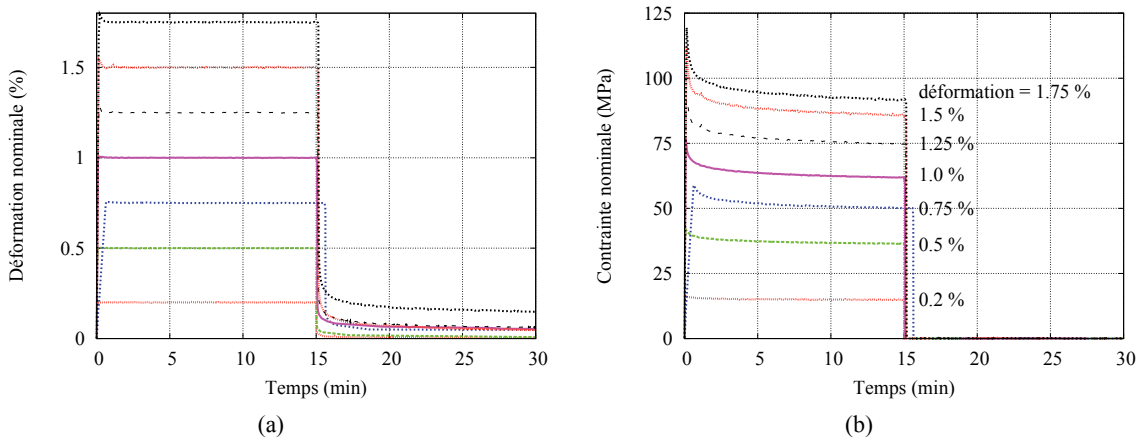



FIGURE 3.8 – Essais TRR à différents niveaux de déformation imposée : (a) déformation fonction du temps, (b) contrainte fonction du temps. La vitesse de déformation est de 0.2 %/s, sauf pour la troisième courbe ($\varepsilon_{max}$=0.75 %) pour laquelle elle est de 0.02%/s.

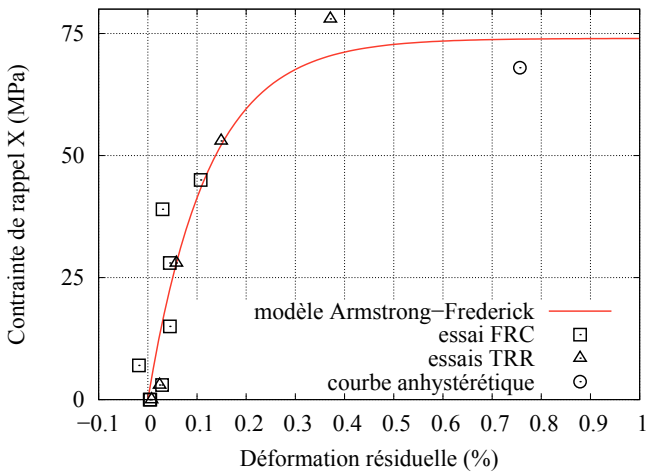
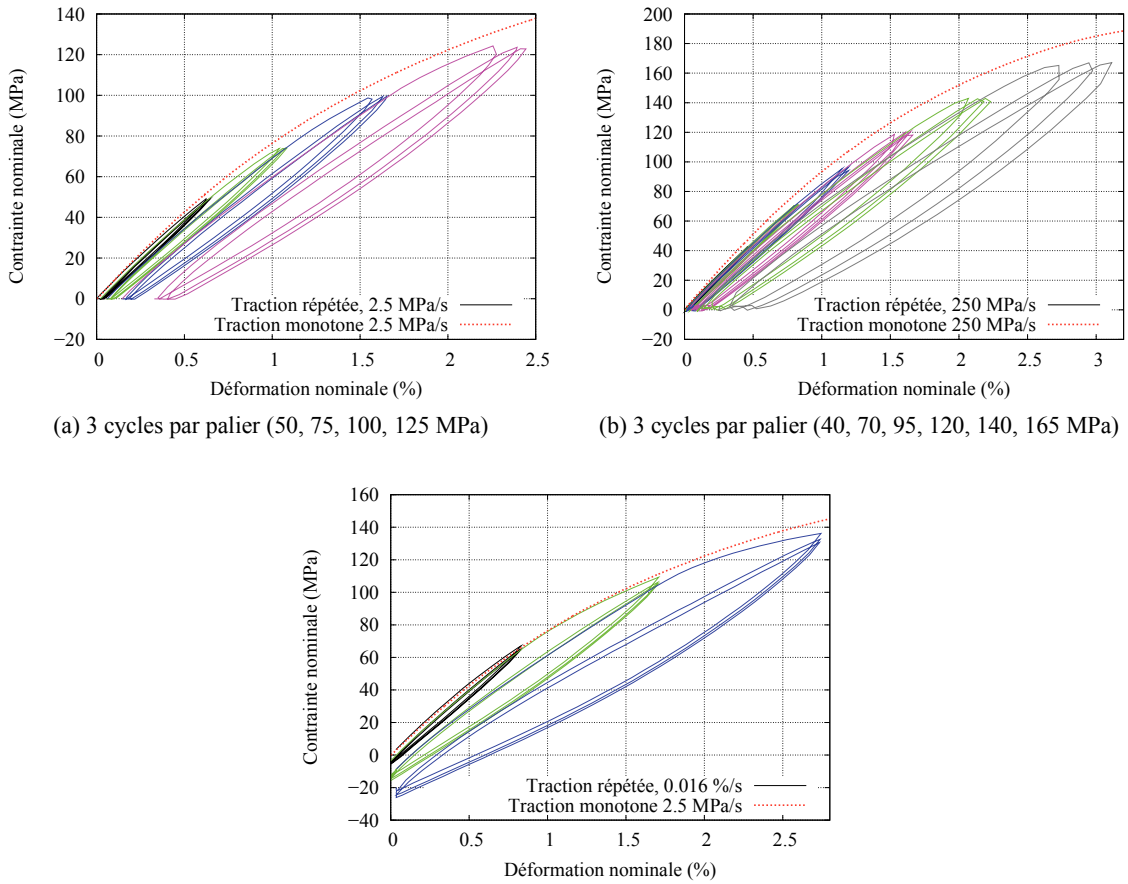



FIGURE 3.9 – Analyse des essais TRR, FRC et de la courbe anhystérétique. La contrainte de rappel due à l'écrouissage cinématique est tracée en fonction de la déformation résiduelle estimée.

### 3.1.4 Essais de traction répétée

#### a Boucles d'hystérèse et déformation résiduelle

Pour compléter l'étude de la réponse cyclique, nous avons réalisé des chargements de traction répétée par paliers croissants (voir figure 3.10) : trois signaux de charge/décharge sont effectués, avant une pause d'une minute, puis les signaux sont répétés à un niveau supérieur, etc. Les essais sont pilotés à vitesse de contrainte constante (2.5 ou 250 MPa/s) ou de déformation constante (0.016 %/s, analogue à 2.5 MPa/s au début du chargement). Dans le troisième cas, les effets visqueux et/ou plastiques expliquent le passage en compression lors du retour à déformation nulle. Ils restent suffisamment modérés pour ne pas entraîner le flambage de l'éprouvette.




(a) 3 cycles par palier (50, 75, 100, 125 MPa)

(b) 3 cycles par palier (40, 70, 95, 120, 140, 165 MPa)

(c) 3 cycles par palier (0.8, 1.8, 2.7 %)

FIGURE 3.10 – Essais de traction répétée par paliers croissants, à différentes vitesses de chargement : (a) 2.5 MPa/s, (b) 250 MPa/s, (c) 0.016 %/s.

La comparaison des aires de boucle entre les deux chargement pilotés en contrainte montre qu'à niveau de contrainte équivalent, l'hystérèse est plus importante sur l'essai à 2.5 MPa/s, ce qui est cohérent avec les modèles viscoélastiques classiques. Notons que les durées de chargement sont faibles, cette observation est donc la conséquence d'effets viscoélastiques court terme.

En outre, les déformations résiduelles (évaluées à la fin des paliers de recouvrance) sont sensiblement plus importantes à 2.5 MPa/s qu'à 250 MPa/s. Nous pouvons ainsi émettre l'hypothèse d'une

dépendance de l'évolution de la déformation résiduelle à la vitesse de chargement. Les mécanismes mis en jeu doivent plutôt être qualifiés de « viscoplastiques » plutôt que « plastiques » (indépendants du temps).

### b Adoucissement cyclique

Sur la figure 3.10, nous observons une chute du module élastique apparent $E$ au cours du chargement. Ce module est calculé au début de chaque cycle, et de façon à mettre en évidence son évolution, nous calculons une raideur tangente normalisée $E/E^0$ pour chacun des cycles des essais de notre campagne expérimentale. Le fait de normaliser $E$ par $E^0$, raideur initiale calculée au début de chaque essai, permet de s'affranchir de la dépendance de la raideur à la vitesse de chargement (viscoélasticité court terme).

Nous pouvons tracer l'évolution de la raideur apparente normalisée en fonction de la déformation résiduelle (figure 3.11a). L'adoucissement cyclique est dans ce cas supposé obéir à une formulation semblable à celle proposée par Détrez [57] pour l'évolution de l'endommagement cyclique. La corrélation n'est pas satisfaisante, ce qui nous conduit à proposer une autre variable activant la chute de raideur. Sur la figure 3.11b, $E/E^0$ est tracé en fonction de la densité d'énergie inélastique $W_{\text{in}}$. Cette grandeur est définie comme la différence entre la densité d'énergie totale $W_{\text{tot}}$ et la densité d'energie élastique $W_{\text{e}}$ :

$$W_{\text{in}} \equiv W_{\text{tot}} - W_{\text{el}} = \int_0^{\varepsilon(t)} \sigma \, \mathrm{d}\varepsilon - \frac{\sigma^2}{2E} \qquad \text{dans le cas uniaxial} \tag{3.5}$$

En dépit d'une dispersion certaine (qui peut être d'origine expérimentale), nous jugeons la corrélation bien meilleure dans ce second cas, en particulier parce que les différentes histoires de chargement (avec ou sans palier de fluage/relaxation notamment) sont réunies autour d'une même tendance, ce qui n'est pas le cas lorsque la chute de raideur est corrélée à la déformation résiduelle. Nous proposons donc une loi phénoménologique permettant de décrire la chute de raideur en fonction de la densité d'énergie inélastique selon :

$$E = E^0 \left(1 - a\left(1 - e^{-\frac{W_{\text{in}}}{b}}\right)\right) \tag{3.6}$$

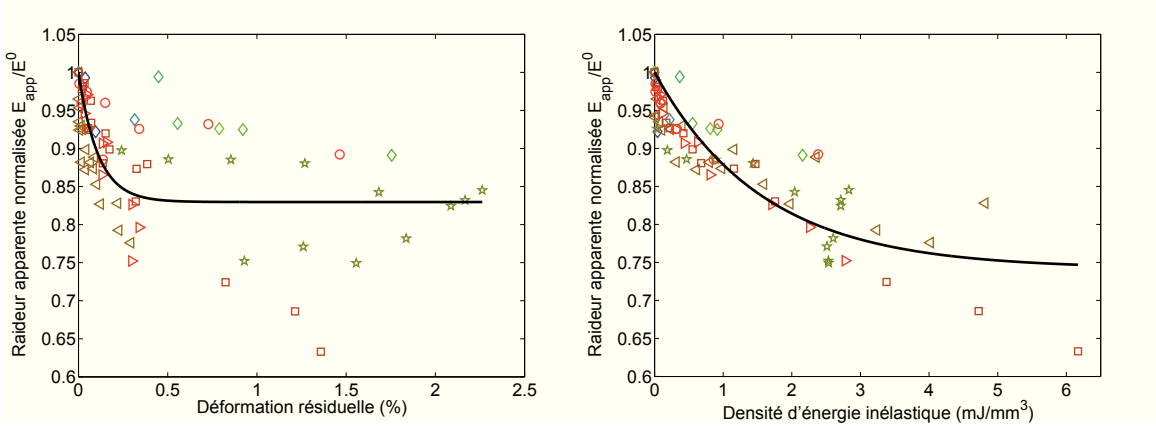
où $a$ est la chute de raideur relative asymptotique et $b$ une densité d'énergie caractéristique (en mJ/mm$^3$).

Cette chute de raideur peut avoir plusieurs origines physiques (évolution structurale de matrice semi-cristalline, décohésion fibre/matrice, cavitation en bout de fibre, etc) [130, 155]. Néanmoins, en l'absence de suivi densitométrique précis ou d'observations expérimentales spécifiques (à l'aide du microscope électronique à balayage, de diffusion des rayons X aux petits angles, ou encore de diffusion des neutrons [148]), il est difficile de relier cette chute de raideur à un mécanisme particulier. C'est la raison pour laquelle nous ne parlons pas d'endommagement, mais plutôt d'adoucissement : nous réservons le terme d'endommagement à des mécanismes avérés de dégradation du matériau, ce que nous ne sommes pas ici en mesure de prouver.

## 3.2 Équations constitutives

L'analyse des essais réalisés lors de la campagne expérimentale pour la caractérisation du comportement cyclique a permis de souligner plusieurs phénomènes qui doivent être modélisés :

- il est nécessaire de découpler les mécanismes viscoélastiques des mécanismes viscoplastiques ;
- les effets viscoélastiques (recouvrables) interviennent sur (au moins) deux échelles de temps et caractérisent la réponse mécanique à faible niveau de contrainte ;




(a) (b)

FIGURE 3.11 – Analyse de la chute de raideur lors des essais complexes, en fonction (a) de la déformation résiduelle ou (b) de la densité d'énergie inélastique. Symboles : ◇ essais TRR ; ☆ courbe anhystérétique ; ○ essai FRC ; □, ◁, ▷ tractions répétées (resp. à 2.5 MPa/s, 250 MPa/s et 0.016 %/s.)

- aux niveaux de contrainte plus élevés, un écoulement visqueux non linéaire est mis en évidence ;
- en parallèle, des mécanismes de déformation non recouvrable sont activés, et leur évolution peut être décrite par la loi d'Armstrong-Frederick ;
- la chute de raideur apparente, mesurée lors des essais cycliques, a été corrélée avec succès à la densité d'énergie inélastique.

Les essais sur lesquels nous nous appuyons sont des essais de traction uniaxiale. Ils ne peuvent donc pas suffire à caractériser la réponse mécanique d'un matériau réputé anisotrope. Dans cette section, nous présentons l'expression générale tri-dimensionnelle du modèle phénoménologique, en postulant que les mécanismes élémentaires identifiés sur une distribution d'orientation de fibres particulière, dans une direction de chargement particulière, sont représentatifs du comportement du matériau de façon générale. Dans un second temps, en utilisant le fait que l'éprouvette ISO527-2-1A a une microstructure quasi-isotrope transverse, nous exprimons ces équations sous leur forme unidimensionnelle, ce qui permettra d'identifier certains des paramètres du modèle.

### 3.2.1 Formulation générale tridimensionnelle

Le modèle proposé est exprimé dans le cadre des matériaux standard généralisés (MSG), défini par Halphen et Nguyen [81]. L'état mécanique local est caractérisé à l'aide de cinq variables d'état tensorielles et une scalaire, que nous définissons avec leurs forces thermodynamiques associées :

- la déformation totale $\underline{\underline{\varepsilon}}$, variable de contrôle extérieur, associée à la contrainte appliquée $\underline{\underline{\sigma}}$ ;
- la déformation viscoélastique long terme $\underline{\underline{\varepsilon}}_{v1}$, associée à $\underline{\underline{\mathcal{A}}}_{v1}$ ;
- la déformation viscoélastique court terme $\underline{\underline{\varepsilon}}_{v2}$, associée à $\underline{\underline{\mathcal{A}}}_{v2}$ ;
- la déformation viscoplastique $\underline{\underline{\varepsilon}}_{vp}$, associée à $\underline{\underline{\mathcal{A}}}_{vp}$ ;
- la variable d'écrouissage $\underline{\underline{\alpha}}$, associée à la contrainte de rappel $\underline{\underline{X}}$ ;
- la variable d'adoucissement, notée $\beta$, associée à $\mathcal{A}_\beta$.

La déformation totale est donc partagée en quatre composantes :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\varepsilon}}_e + \underline{\underline{\varepsilon}}_{v1} + \underline{\underline{\varepsilon}}_{v2} + \underline{\underline{\varepsilon}}_{vp} \tag{3.7}$$

La déformation élastique instantanée $\underline{\underline{\varepsilon}}_e$ n'est pas à proprement parler une variable d'état. Néanmoins, d'un point de vue numérique, il est plus commode de travailler avec $\underline{\underline{\varepsilon}}_e$ et $p$, la déformation visco-plastique cumulée, plutôt qu'avec $\underline{\underline{\varepsilon}}_{vp}$ [27]. C'est ainsi que nous présenterons le schéma de résolution numérique proposé en annexe B.

### a Équations d'état

À la température de référence $T_0$, l'énergie libre volumique de Helmholtz $w_0 = w(T_0)$ est écrite comme la somme des énergies stockées, et s'exprime en fonction des variables d'état :

$$\begin{aligned}\rho_0 w_0\left(\underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{\varepsilon}}_{v1}, \underline{\underline{\varepsilon}}_{v2}, \underline{\underline{\varepsilon}}_{vp}, \underline{\underline{\alpha}}, \beta\right) &= \frac{1}{2}\underline{\underline{\varepsilon}}_{v1} : \mathbb{C}^{v_1} : \underline{\underline{\varepsilon}}_{v1} + \frac{1}{2}\underline{\underline{\varepsilon}}_{v2} : \mathbb{C}^{v_2} : \underline{\underline{\varepsilon}}_{v2} \\ &+ \frac{1}{3}C\underline{\underline{\alpha}} : \underline{\underline{\alpha}} + \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\varepsilon}}_{v1} - \underline{\underline{\varepsilon}}_{v2} - \underline{\underline{\varepsilon}}_{vp}\right) : \mathbb{C}^e(\beta) : \underbrace{\left(\underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\varepsilon}}_{v1} - \underline{\underline{\varepsilon}}_{v2} - \underline{\underline{\varepsilon}}_{vp}\right)}_{\underline{\underline{\varepsilon}}_e}\end{aligned} \tag{3.8}$$

$\rho_0 = \rho(T_0)$ est la masse volumique à $T_0$. Les forces thermodynamiques sont définies comme les dérivées partielles de l'énergie libre en fonction de la variable d'état correspondante, ce qui permet d'aboutir à leur expression en régime isotherme :

$$\underline{\underline{\sigma}} \equiv \rho\frac{\partial w}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} = \mathbb{C}^e(\beta) : \left(\underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\varepsilon}}_{v1} - \underline{\underline{\varepsilon}}_{v2} - \underline{\underline{\varepsilon}}_{vp}\right) = \mathbb{C}^e(\beta) : \underline{\underline{\varepsilon}}_e \tag{3.9}$$

$$\underline{\underline{\mathcal{A}}}_{v1} \equiv -\rho\frac{\partial w}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}_{v1}} = \underline{\underline{\sigma}} - \mathbb{C}^{v_1} : \underline{\underline{\varepsilon}}_{v1} \tag{3.10}$$

$$\underline{\underline{\mathcal{A}}}_{v2} \equiv -\rho\frac{\partial w}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}_{v2}} = \underline{\underline{\sigma}} - \mathbb{C}^{v_2} : \underline{\underline{\varepsilon}}_{v2} \tag{3.11}$$

$$\underline{\underline{\mathcal{A}}}_{vp} \equiv -\rho\frac{\partial w}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}_{vp}} = \underline{\underline{\sigma}} \tag{3.12}$$

$$\underline{\underline{X}} \equiv -\rho\frac{\partial w}{\partial \underline{\underline{\alpha}}} = -\frac{2C}{3}\underline{\underline{\alpha}} \tag{3.13}$$

$$\mathcal{A}_\beta \equiv -\rho\frac{\partial w}{\partial \beta} = -\frac{1}{2}\underline{\underline{\varepsilon}}_e : \frac{\partial \mathbb{C}^e}{\partial \beta} : \underline{\underline{\varepsilon}}_e \tag{3.14}$$

$\mathbb{C}^e$ et $\mathbb{C}^{v_i}$ sont des tenseurs élastiques du quatrième ordre, intervenant dans l'expression de l'élasticité instantanée ainsi que dans les formulations viscoélastiques long et court terme. A ce stade, nous ne faisons pas d'hypothèse particulière sur leur forme tri-dimensionnelle : isotrope, orthotrope, anisotropie complète, etc.

L'adoucissement cyclique est activé par la variable d'état $\beta$ selon l'équation :

$$\begin{aligned}\mathbb{C}^e(\beta) &= g(\beta)\,\mathbb{C}^e(0) \\ \text{avec} \quad g(\beta) &= 1 - a\left(1 - \exp\left(\frac{-\beta}{b}\right)\right)\end{aligned} \tag{3.15}$$

En toute généralité, il serait possible d'envisager une influence de l'adoucissement cyclique sur des propriétés du matériau autres que le tenseur élastique, telles que les paramètres viscoplastiques ou viscoélastiques. Cependant, une telle extension du modèle devrait s'accompagner d'une justification expérimentale ; par ailleurs, des résultats publiés dans la littérature montrent qu'une chute du module

élastique est bien observée lors de chargements de fatigue sur des polyamides renforcés en fibres de verre courtes – lors des premiers cycles, mais ne font pas état d'une variation significatives de paramètres macroscopiques autres tels que l'énergie dissipée $\Delta W_{\text{diss}}$ ou encore le déphasage contrainte-déformation $\tan\delta$ [148, 150]. Notre modélisation de l'endommagement cyclique est donc cohérente avec ces observations.

### b Équations d'évolution

Conformément au cadre des MSG, les équations d'évolution font intervenir un second potentiel, convexe et minimal en 0. Nous définissons donc le potentiel dual de dissipation $\varphi^*$, dépendant des forces thermodynamiques associées et des variables d'état selon [5] :

$$\begin{aligned}\varphi^* &= \varphi^*(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{\mathcal{A}}}_{v1}, \underline{\underline{\mathcal{A}}}_{v2}, \underline{\underline{\mathcal{A}}}_{vp}, \underline{\underline{X}}, \mathcal{A}_\beta, \underbrace{\underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{\varepsilon}}_{v1}, \underline{\underline{\varepsilon}}_{v2}, \underline{\underline{\varepsilon}}_{vp}, \underline{\underline{\alpha}}, \beta}_{\text{variables d'état}}) \\ &= \int A\left[\sinh\left(\frac{f\left(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{X}}, \underline{\underline{\alpha}}\right)}{H}\right)\right]^m \mathrm{d}f + \frac{3\,\underline{\underline{\mathcal{A}}}_{v1} : \mathbb{K} : \underline{\underline{\mathcal{A}}}_{v1}}{4\eta_1} + \frac{3\,\underline{\underline{\mathcal{A}}}_{v2} : \mathbb{K} : \underline{\underline{\mathcal{A}}}_{v2}}{4\eta_2} + \tilde{\varphi}^*(\mathcal{A}_\beta, \text{ variables d'état})\end{aligned} \tag{3.16}$$

$f$ est la fonction de charge. Nous proposons une expression respectant le cadre des MSG, d'après les travaux de Germain et al. [76] et Chaboche [39] :

$$f\left(\underline{\underline{\mathcal{A}}}_{vp}, \underline{\underline{X}}, \underline{\underline{\alpha}}\right) = \mathcal{J}_{vp} + \frac{3\gamma}{4C}\left[\underline{\underline{X}} : \left(\frac{2}{3}\mathbb{P}\right) : \underline{\underline{X}} - \frac{4}{9}C^2\underline{\underline{\alpha}} : \left(\frac{2}{3}\mathbb{P}\right) : \underline{\underline{\alpha}}\right] \tag{3.17}$$

$\mathcal{J}_{vp}$ est la contrainte équivalente définie en fonction du tenseur $\underline{\underline{\mathcal{A}}}_{vp}$ centré sur $\underline{\underline{X}}$ :

$$\mathcal{J}_{vp} = \sqrt{\left(\underline{\underline{\mathcal{A}}}_{vp} - \underline{\underline{X}}\right) : \mathbb{P} : \left(\underline{\underline{\mathcal{A}}}_{vp} - \underline{\underline{X}}\right)} \equiv \| \underline{\underline{\mathcal{A}}}_{vp} - \underline{\underline{X}} \|_{\mathbb{P}} \tag{3.18}$$

Notons que contrairement aux modèles viscoplastiques classiques, notre formulation ne fait pas intervenir de seuil, et cette fonction est donc toujours positive. Le domaine (visco-)élastique se réduit donc au point 0. Par ailleurs, $\mathbb{P}$ est un tenseur symétrique d'ordre 4, défini positif. Dans le cas isotrope, il est proportionnel à $\frac{3}{2}\mathbb{K}$, ce qui nous ramène à la norme usuelle de von Mises [6]. D'une façon plus générale, ce tenseur permet de décrire une contrainte équivalente anisotrope, ce qui sera détaillé dans le chapitre 5.

$\tilde{\varphi}^*$ est la part du potentiel dual de dissipation dépendant de l'adoucissement cyclique. Son expression doit permettre de modéliser le fait que cet adoucissement est activé par la densité d'énergie inélastique. Par ailleurs, nous considérons que la chute de raideur apparente aux faibles niveaux de contrainte est négligeable, ce qui revient à faire l'hypothèse que seule l'énergie dissipée par mécanismes viscoplastiques est responsable de son évolution. Nous postulons donc une expression de $\tilde{\varphi}^*$ sous la forme [7] :

$$\tilde{\varphi}^*(\mathcal{A}_\beta, \text{ variables d'état}) = \mathcal{A}_\beta \cdot A\left[\sinh\left(\frac{\| \mathbb{C}^e(\beta) : \underline{\underline{\varepsilon}}_e + \frac{2C}{3}\underline{\underline{\alpha}} \|_{\mathbb{P}}}{H}\right)\right]^m \cdot \left(\| \mathbb{C}^e(\beta) : \underline{\underline{\varepsilon}}_e + \frac{2C}{3}\underline{\underline{\alpha}} \|_{\mathbb{P}} + \frac{4\gamma}{9C} \| \underline{\underline{\alpha}} \|_{\mathbb{P}}\right)$$

5. $\varphi^*$ est une fonction différentiable. Puisque $f$ est positive, il est facile de prouver que $\varphi^*$ est convexe de chacune de ses variables. Enfin, $f(0) = 0$ et $g'(\beta) \leqslant 0$ (ce qui implique $\mathcal{A}_\beta \geqslant 0$) expliquent pourquoi $\varphi^*$ est minimal en 0.

6. Nous utilisons ici la décomposition classique du tenseur identité d'ordre 4, $\mathbb{I}$, en projecteurs sur la partie sphérique $\mathbb{J}$ et sur la partie déviatorique $\mathbb{K}$ d'un tenseur d'ordre 2. La norme de von Mises s'écrit alors : $\| \underline{\underline{u}} \|_{\frac{3}{2}\mathbb{K}} = \sqrt{\frac{3}{2}\underline{\underline{\mathrm{dev}}}\left(\underline{\underline{u}}\right) : \underline{\underline{\mathrm{dev}}}\left(\underline{\underline{u}}\right)}$.

7. Cette équation est une formulation condensée de l'expression rigoureuse de $\tilde{\varphi}^*$ dans laquelle il faudrait exprimer $\underline{\underline{\varepsilon}}_e$ sous la forme $\underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\varepsilon}}_{v1} - \underline{\underline{\varepsilon}}_{v2} - \underline{\underline{\varepsilon}}_{vp}$.

Les lois d'évolution du problème mécanique sont écrites selon le formalisme des MSG :

$$\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}_{v1} \equiv \frac{\partial \varphi^*}{\partial \underline{\underline{\mathcal{A}}}_{v1}} = \frac{3}{2\eta_1}\underline{\underline{\mathrm{dev}}}\left(\underline{\underline{\mathcal{A}}}_{v1}\right) \tag{3.19}$$

$$\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}_{v2} \equiv \frac{\partial \varphi^*}{\partial \underline{\underline{\mathcal{A}}}_{v2}} = \frac{3}{2\eta_2}\underline{\underline{\mathrm{dev}}}\left(\underline{\underline{\mathcal{A}}}_{v2}\right) \tag{3.20}$$

$$\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}_{vp} \equiv \frac{\partial \varphi^*}{\partial \underline{\underline{\mathcal{A}}}_{vp}} = \frac{\partial \varphi^*}{\partial f}\frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} = \underbrace{A\left[\sinh\left(\frac{\mathcal{J}_{vp}}{H}\right)\right]^m}_{\dot{p} \geqslant 0} \cdot \underbrace{\frac{\mathbb{P} : \left(\underline{\underline{\mathcal{A}}}_{vp} - \underline{\underline{X}}\right)}{\mathcal{J}_{vp}}}_{\underline{\underline{n}}_{vp}} \tag{3.21}$$

$$\dot{\underline{\underline{\alpha}}} \equiv \frac{\partial \varphi^*}{\partial \underline{\underline{X}}} = \frac{\partial \varphi^*}{\partial f}\frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{X}}} = -\dot{p}\left(\underline{\underline{n}}_{vp} + \frac{2\gamma}{3}\mathbb{P} : \underline{\underline{\alpha}}\right) \tag{3.22}$$

$$\dot{\beta} \equiv \frac{\partial \varphi^*}{\partial \mathcal{A}_\beta} = \mathcal{J}_{vp} + \frac{4\gamma C}{9}\underline{\underline{\alpha}} : \mathbb{P} : \underline{\underline{\alpha}} \tag{3.23}$$

$\dot{p}$ est le multiplicateur viscoplastique, et s'identifie également à l'évolution instantanée de la déformation viscoplastique cumulée. $\underline{\underline{n}}_{vp}$ est la direction qui maximise la dissipation viscoplastique. Sous leur forme actuelle, les évolutions de la déformation viscoélastique ou viscoplastique sont isochores, ce qui s'écrit $\mathrm{Tr}\left(\underline{\underline{\varepsilon}}_{v1}\right) = \mathrm{Tr}\left(\underline{\underline{\varepsilon}}_{v2}\right) = \mathrm{Tr}\left(\underline{\underline{\varepsilon}}_{vp}\right) = \mathrm{Tr}\left(\underline{\underline{\alpha}}\right) = 0$. On remarque qu'une écriture équivalente du taux de variation de la variable d'endommagement est :

$$\dot{\beta} = \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}_{vp} : \underline{\underline{\mathcal{A}}}_{vp} + \dot{\underline{\underline{\alpha}}} : \underline{\underline{X}} \tag{3.24}$$

ce qui montre que $\beta$ est bien la densité d'énergie dissipée par mécanismes viscoplastique. Enfin, la dissipation intrinsèque s'exprime comme la somme des taux de variation de chaque variable d'état multipliés par la force thermodynamique irréversible associée :

$$\begin{aligned}\mathscr{D}_1 &= \underline{\underline{\mathcal{A}}}_{v1} : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}_{v1} + \underline{\underline{\mathcal{A}}}_{v2} : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}_{v2} + \underline{\underline{\mathcal{A}}}_{vp} : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}_{vp} + \underline{\underline{X}} : \dot{\underline{\underline{\alpha}}} + \mathcal{A}_\beta \cdot \dot{\beta} \\ &= \frac{3}{2\eta_1}\underline{\underline{\mathcal{A}}}_{v1} : \mathbb{K} : \underline{\underline{\mathcal{A}}}_{v1} + \frac{3}{2\eta_2}\underline{\underline{\mathcal{A}}}_{v2} : \mathbb{K} : \underline{\underline{\mathcal{A}}}_{v2} + \\ &\quad \dot{p}\left(\mathcal{J}_{vp} + \frac{\gamma}{C}\underline{\underline{X}} : \mathbb{P} : \underline{\underline{X}}\right)\left(1 - \frac{g'(\beta)}{2}\underline{\underline{\varepsilon}}_e : \mathbb{C}^e(0) : \underline{\underline{\varepsilon}}_e\right)\end{aligned} \tag{3.25}$$

La positivité de $\dot{p}$, le caractère défini positif de $\mathbb{C}^e$, $\mathbb{K}$ et $\mathbb{P}$ ainsi que la négativité de $g'(\beta)$ montrent facilement que $\mathscr{D}_1$ est toujours positive, ce qui constitue une condition d'admissibilité thermodynamique, issue du second principe.

Remarquons que la formulation de la loi d'écoulement viscoplastique combinée avec un écrouissage cinématique non linéaire, inspirée de notre analyse mécanique des essais complexes, a déjà été proposée par Delobelle et al. [56] pour le comportement anisotrope non linéaire d'alliages au Zirconium.

### 3.2.2 Expression dans le cas uniaxial

Les essais de la campagne de caractérisation du comportement sont réalisés sur des éprouvettes de traction. Le tenseur des contraintes est unidimensionnel : $\underline{\underline{\sigma}} = \sigma(t)\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1$. Sous l'hypothèse d'isotropie

transverse de la réponse mécanique, en utilisant les notations de Voigt et la représentation classique de Hill [90], nous pouvons exprimer le tenseur $\mathbb{P}$ sous la forme :

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 2B & -B & -B & 0 & 0 & 0 \\ -B & (B+D) & -D & 0 & 0 & 0 \\ -B & -D & (B+D) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2G \end{bmatrix}_{(11,22,33,12,13,23)} \tag{3.26}$$

De façon à simplifier les calculs, il est possible de normaliser ce tenseur en faisant le choix $2B = 1$. Dans ces conditions, nous pouvons montrer que la variable tensorielle d'écrouissage $\underline{\underline{\alpha}}$ et la contrainte de rappel $\underline{\underline{X}}$ sont diagonales et dépendent de l'évolution d'un seul scalaire :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{X}} &= X(t)\, \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 - \frac{X(t)}{2} \left(\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3\right) \\ \underline{\underline{\alpha}} &= \alpha(t)\, \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 - \frac{\alpha(t)}{2} \left(\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3\right) \end{aligned}$$

De même, sous l'hypothèse d'isotropie transverse de la réponse viscoélastique, nous pouvons écrire l'évolution des déformations viscoélastique long et court terme selon :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\varepsilon}}_{v1} &= \varepsilon_{v1}(t)\, \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 - \frac{\varepsilon_{v1}(t)}{2} \left(\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3\right) \\ \underline{\underline{\varepsilon}}_{v2} &= \varepsilon_{v2}(t)\, \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 - \frac{\varepsilon_{v2}(t)}{2} \left(\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3\right) \end{aligned}$$

Pour la simplicité d'écriture, nous faisons l'hypothèse que les tenseurs $\mathbb{C}^{v_1}$ et $\mathbb{C}^{v_2}$ sont même isotropes, comme suggéré par Andriyana et al. [7]. Nous ne faisons pas d'hypothèse particulière au sujet du tenseur $\mathbb{C}^e$. Nous pouvons alors réduire les équations du modèle 3D à une formulation 1D :

$$\sigma = E_e(\beta)\, (\varepsilon - \varepsilon_{v1} - \varepsilon_{v2} - \varepsilon_{vp}) = E_e(\beta)\, \varepsilon_e \tag{3.27}$$

$$X = -\frac{2C}{3}\alpha \tag{3.28}$$

$$\dot{\varepsilon}_{v1} = \frac{1}{\eta_1}\left(\sigma - E_{v1}\epsilon_{v1}\right) \tag{3.29}$$

$$\dot{\varepsilon}_{v2} = \frac{1}{\eta_2}\left(\sigma - E_{v2}\epsilon_{v2}\right) \tag{3.30}$$

$$\dot{\varepsilon}_{vp} = A\left[\sinh\left(\frac{|\sigma - \frac{3X}{2}|}{H}\right)\right]^m \operatorname{sign}\left(\sigma - \frac{3X}{2}\right) \tag{3.31}$$

$$\dot{\alpha} = -A\left[\sinh\left(\frac{|\sigma - \frac{3X}{2}|}{H}\right)\right]^m \left(\operatorname{sign}\left(\sigma - \frac{3X}{2}\right) + \gamma\alpha\right) \tag{3.32}$$

$$\dot{\beta} = \sigma\dot{\varepsilon}_{vp} + \frac{3X}{2}\dot{\alpha} \tag{3.33}$$

$$E_e(\beta) = g(\beta)\, E_e^0 \tag{3.34}$$

Les modules élastiques et viscoélastiques sont définis à partir du tenseur de souplesse $\mathbb{S}^i \equiv \mathbb{C}^{i^{-1}}$. La première composante de $\mathbb{S}^i$ s'identifie à $1/E_i$. Le schéma rhéologique unidimensionnel du modèle du comportement proposé est présenté sur la figure 3.12.

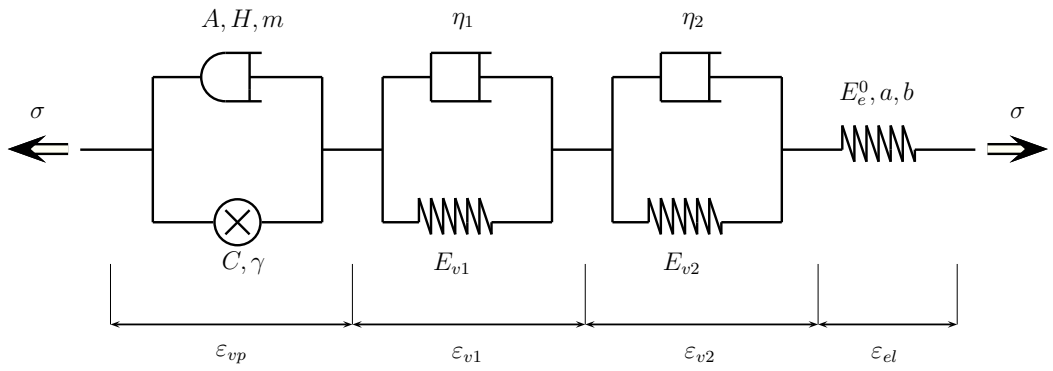



FIGURE 3.12 – Schéma rhéologique unidimensionnel du modèle de comportement proposé.

### 3.2.3 Stratégie d'identification

La procédure d'identification des paramètres fait partie intégrante de la modélisation du comportement. Le modèle phénoménologique comprend 12 coefficients qui peuvent être déterminés sans ambiguité à partir des essais uniaxiaux. Pour cela, une stratégie d'identification doit être proposée. En effet, du point de vue numérique, il est difficile de construire une fonction objectif qui soit convexe de tous ses paramètres et dont le minimum dans un expace à 12 dimensions renvoie le jeu de paramètres optimal. D'un point de vue plus fondamental, il est possible d'utiliser la richesse de la base expérimentale pour découpler certains phénomènes physiques, et ainsi déterminer des valeurs physiquement motivées des paramètres matériaux.

L'étape d'identification est réalisée à l'aide du logiciel ZÉBULON®, développé à l'École Nationale Supérieure des Mines de Paris et à l'Office National d'Études et de Recherche Aérospatiales [206]. ZÉBULON® est un code de calcul par éléments finis, mais contient également un algorithme d'optimisation dédié à l'identification des paramètres d'une loi de comportement à partir d'essais mécaniques, fondé sur la méthode de Levenberg-Marquardt. Le jeu de paramètres issu de notre procédure d'optimisation est présenté dans le tableau 3.1.

#### a Viscoélasticité court terme

Les paramètres viscoélastiques court terme, ainsi que le module élastique initial, sont déterminés à partir de l'influence de la vitesse de chargement sur la raideur. Les durées de chargement sont suffisamment faibles pour négliger l'influence de la viscoélasticité long terme, et les niveaux de chargement sont inférieurs à 30 MPa, ce qui est trop faible pour activer les mécanismes viscoplastiques, comme nous l'avons mis en évidence sur les essais TRR. Le modèle proposé est ainsi équivalent, dans ce cas, à un modèle de Kelvin-Voigt du premier ordre.

La figure 3.13 démontre que la modélisation retenue des effets viscoélastiques court terme est pertinente. En particulier, nous sommes capables de prédire l'influence de la vitesse de chargement sur la raideur sur quatre décades avec les trois seuls paramètres $E_e^0$, $E_{v2}$ et $\eta_2$. Enfin, le temps caractéristique viscoélastique $\tau_2 \equiv \eta_2/E_{v2}$ est inférieur à une seconde, ce qui cohérent avec la dénomination de viscoélasticité « court terme ».

| Caractéristique physique | Paramètre | Symbole | Unité | Valeur | Équation |
|---|---|---|---|---|---|
| Élasticité | Module de Young initial | $E_e^0$ | MPa | $1.13\times10^4$ | 3.15 |
| Viscoélasticité long terme | Module de raideur | $E_{v1}$ | MPa | $6.27\times10^4$ | 3.10 |
| | Paramètre visqueux | $\eta_1$ | MPa.s | $3.36\times10^6$ | 3.10 |
| | *Temps caractéristique* | $\tau_1$ | s | 53.6 | $\tau_1 = \eta_1/E_{v1}$ |
| Viscoélasticité court terme | Module de raideur | $E_{v2}$ | MPa | $3.39\times10^4$ | 3.11 |
| | Paramètre visqueux | $\eta_2$ | MPa.s | $1.24\times10^4$ | 3.11 |
| | *Temps caract.* | $\tau_2$ | s | 0.34 | $\tau_2 = \eta_2/E_{v2}$ |
| Écrouissage non linéaire | Module d'écrouissage | $C$ | MPa | $3.61\times10^4$ | 3.13, 3.17 |
| | Paramètre de non-linéarité | $\gamma$ | - | $5.45\times10^2$ | 3.17 |
| Viscosité non linéaire | Vitesse caract. | $A$ | $s^{-1}$ | $3.29\times10^{-7}$ | 3.16, 3.21 |
| | Contrainte caract. | $H$ | MPa | 46.7 | 3.16, 3.21 |
| | Exposant | $m$ | - | 7.44 | 3.16, 3.21 |
| Adoucissement cyclique | Adoucissement maximal | $a$ | % | 25.0 | 3.15 |
| | Densité d'énergie caract. | $b$ | $J.m^{-3}$ | $1.10\times10^5$ | 3.15 |

TABLE 3.1 – Paramètres du modèle de comportement identifiés à partir d'une éprouvette ISO527-2-1A dans les conditions standard ($T$=23 °C, $\mathcal{H}$=50 %).

### b Viscoélasticité long terme

Une fois les paramètres viscoélastiques court terme identifiés, nous nous intéressons au premier cycle de fluage/recouvrance de l'essai FRC pour étudier la réponse viscoélastique long terme à faible niveau de contrainte. La contrainte est suffisamment faible pour négliger l'activation de la viscoplasticité, ce que nous vérifions en constatant que la recouvrance est totale. Le modèle de comportement proposé peut donc s'assimiler ici à un modèle de Kelvin-Voigt du second ordre.

Le résultat de l'identification des paramètres $E_{v1}$ et $\eta_1$ est présenté sur la figure 3.14. Les amplitudes ainsi que les vitesses de fluage et de recouvrance sont bien décrites par le modèle. Nous pouvons vérifier que la réponse du modèle est également en accord avec les essais TRR présentant une recouvrance totale (voir la section 3.2.4). Le temps caractéristique viscoélastique $\tau_1$ est tel que $\tau_1 \gg \tau_2$, ce qui est cohérent avec notre modélisation d'une réponse viscoélastique à deux échelles de temps.

### c Viscosité et écrouissage non linéaires

Cinq paramètres doivent être identifiés : trois concernent la loi d'écoulement visqueux non linéaire ($A$, $H$ et $m$) et deux la loi d'écrouissage cinématique non linéaire ($C$ et $\gamma$). La courbe anhystérétique s'est révélée être un essai particulièrement discrimant en matière de choix de modélisation de la loi de viscosité non linéaire, c'est la raison pour laquelle elle sert de base pour l'identification. De façon à faciliter la procédure d'optimisation, et à garantir le sens physique du jeu de paramètre optimal, nous choisissons comme point de départ les paramètres du modèle identifiés lors de l'analyse mécanique des essais de comportement (figures 3.6b et 3.9). Les paramètres viscoélastiques court- et long terme sont égaux aux valeurs déterminées lors des étapes précédentes. A ce stade de l'identification, nous neutralisons l'adoucissement, en fixant $a = 0$. Cette hypothèse ne remet pas en question l'ordre de grandeur des coefficients identifiés, puisque la chute de raideur mesurée sur la courbe anhystérétique reste modérée.

La figure 3.15 montre clairement la pertinence de notre modélisation des phénomènes viscoplas-

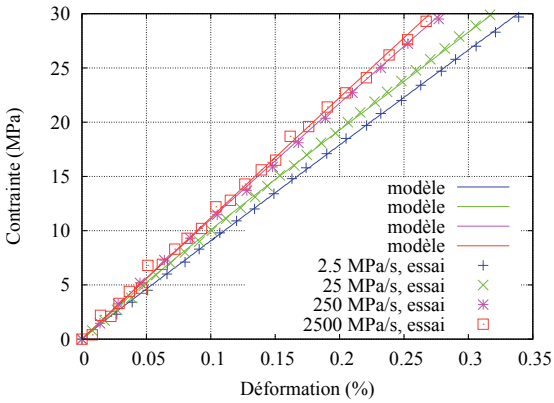



FIGURE 3.13 – Identification des paramètres viscoélastiques court terme sur le début des essais de traction monotone.

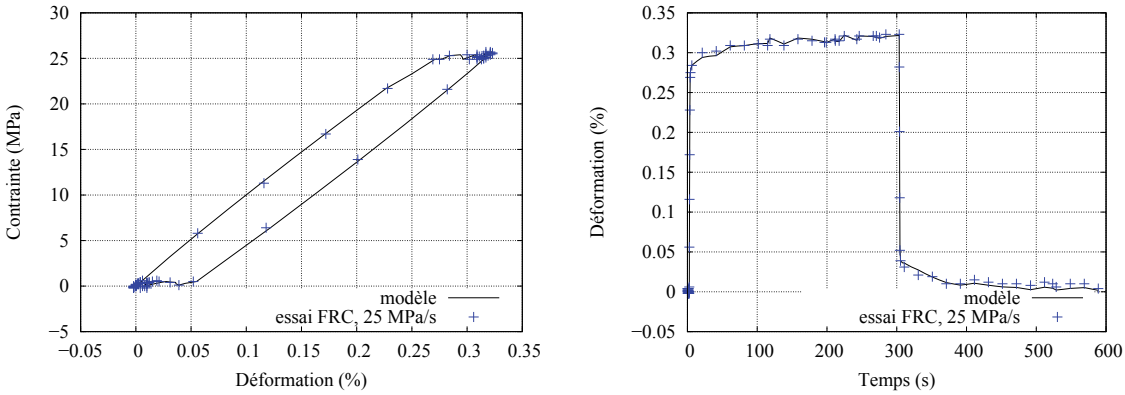



FIGURE 3.14 – Caractérisation de la viscoélasticité long terme sur le premier cycle de l'essai FRC.

tiques. Les paramètres identifiés permettent ainsi une description très précise des paliers de relaxation, tant en amplitude qu'en vitesse. Ce résultat est très satisfaisant, d'autant plus que la courbe anhystérétique est un essai qui a permis de mettre en défaut de nombreux autres modèles de comportement (voir la section 3.4.1).

### d Adoucissement

Nous avons proposé une équation phénoménologique permettant de rendre compte de la chute de raideur au cours du chargement. Les deux paramètres de la loi, $a$ et $b$, sont identifiés à partir des essais de traction monotone et de la courbe anhystérétique, de façon à permettre le meilleur compromis entre les deux (voir figure 3.16). Les paramètres viscoplastiques $A$, $H$, $m$, $C$ et $\gamma$ sont également légèrement modifiés à partir de leurs valeurs identifiées précédemment, puisque nous avions jusqu'ici choisi de négliger l'adoucissement.

La prédiction du modèle en ce qui concerne la courbe anhystérétique est légèrement dégradée ; les essais de traction monotone sont décrits avec une précision satisfaisante sur la gamme de vitesse étudiée. Par ailleurs, il est possible de s'interroger sur le choix de caractériser l'adoucissement à partir d'essais non cycliques ; cette stratégie est motivée par la volonté de conserver une base d'essais réduite

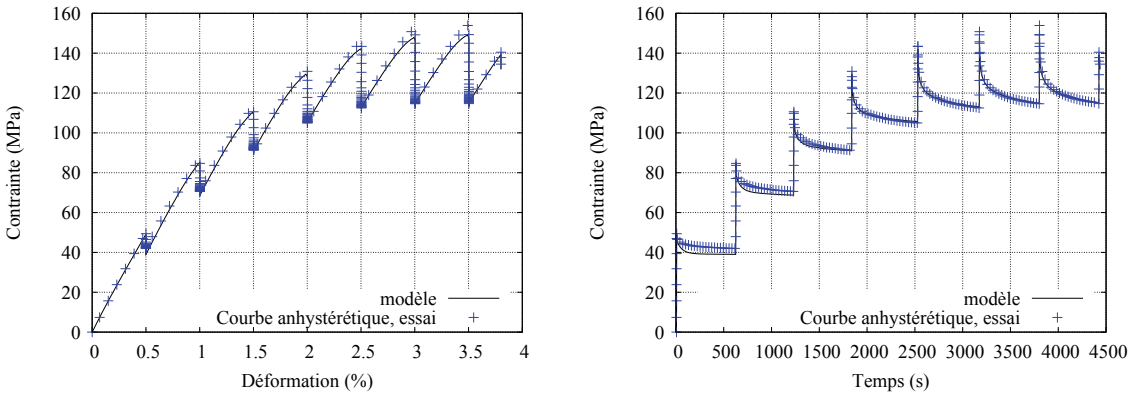
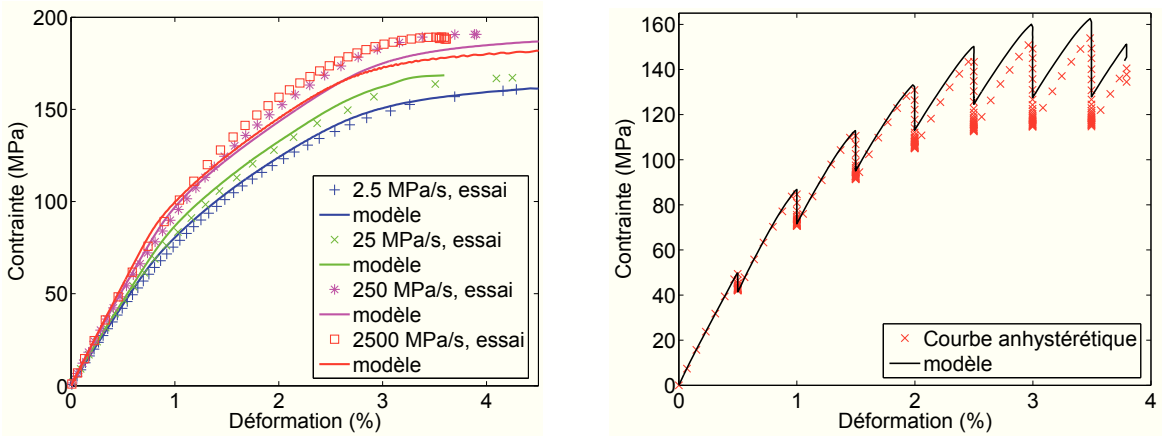



FIGURE 3.15 – Identification des paramètres viscoplastiques sur la phase de charge de la courbe anhystérétique. Les paramètres d'adoucissement sont inactifs ici.

pour l'identification, et la pertinence de ce choix est confirmée par les essais de validation.




(a) Traction monotone à différentes vitesses

(b) Courbe anhystérétique

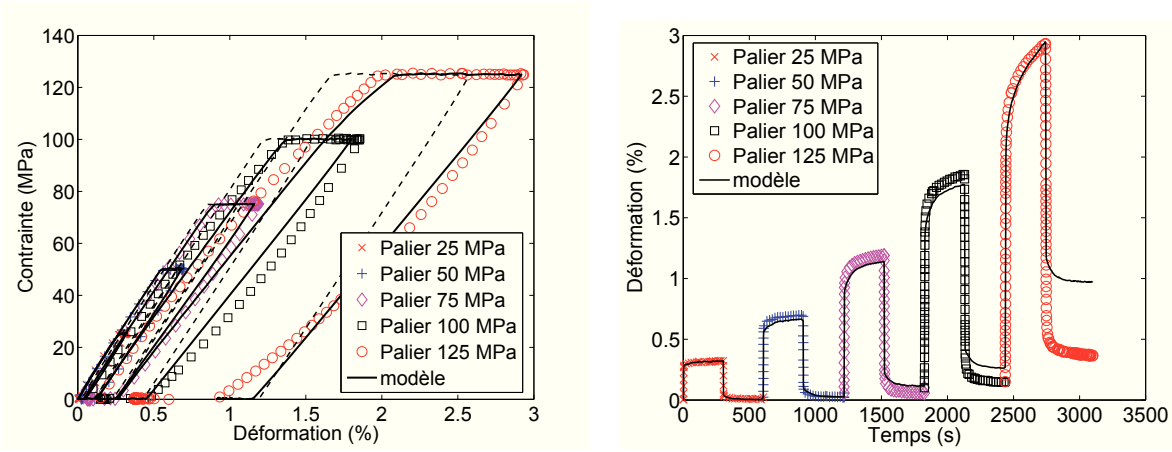
FIGURE 3.16 – Compromis entre les résultats sur les courbes de traction monotone et la courbe anhystérétique pour identifier les paramètres d'adoucissement $a$ et $b$.

### 3.2.4 Validation en conditions standard

Dans cette section, nous validons le modèle de comportement proposé sur des essais ne faisant pas partie de la base d'identification. Les valeurs des paramètres sont celles déterminées à l'issue de la procédure d'identification, et nous comparons la réponse prédite par le modèle aux résultats expérimentaux. Les niveaux de contrainte appliquée sont limités à 150 MPa, ce qui permet de couvrir très largement la gamme de sollicitations en fatigue.

La comparaison calcul-essai est tout d'abord réalisée sur le chargement FRC complet (le premier palier servant à l'identification des paramètres viscoélastiques long terme), et présentée sur la figure 3.17. Nous constatons tout d'abord la pertinence de notre modélisation viscoélastique linéaire des effets visqueux recouvrables, puisque le second palier est prédit de façon très satisfaisante. Aux niveaux de contrainte plus élevés, la prédiction du modèle est tout à fait satisfaisante, les phases de fluage et

de recouvrance étant bien décrites jusqu'à 100 MPa. Notons cependant qu'à 125 MPa, le modèle sur-estime la déformation résiduelle, mais ce niveau est au-delà des chargements représentatifs sur pièce. En outre, nous montrons l'intérêt de modéliser la chute de raideur au cours de l'essai, puisque la réponse du modèle calculée en imposant $a = 0$, c'est-à-dire $E_e = E_e^0$, est beaucoup moins satisfaisante (voir la figure 3.17a).

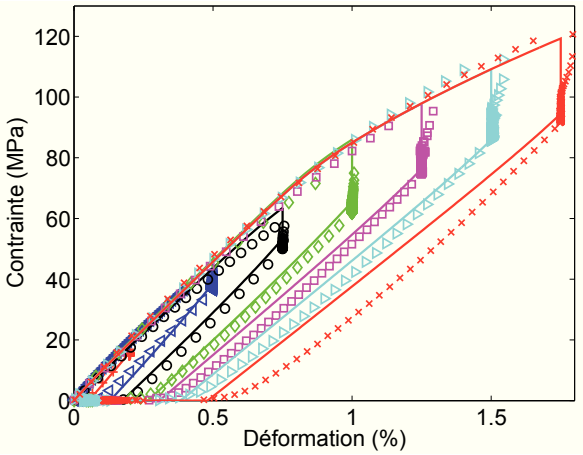



(a) (b)

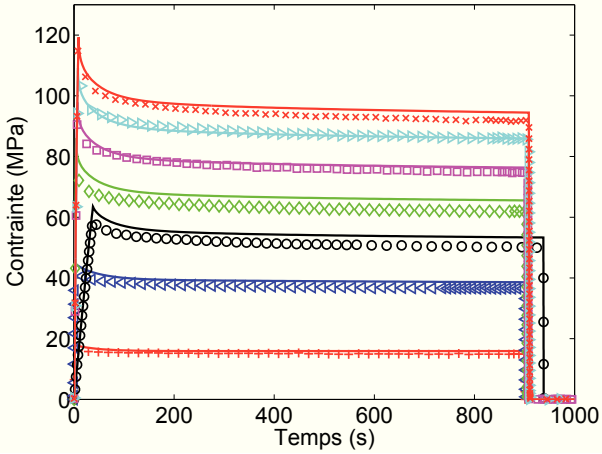
FIGURE 3.17 – Validation du modèle proposé sur l'essai FRC. (a) Courbe contrainte-déformation : comparaison de la réponse du modèle avec (ligne continue) ou sans (tirets) modélisation de l'endommagement cyclique. (b) Déformation en fonction du temps.

Les essais TRR ne font pas partie de notre base d'identification. Ils nous servent donc ici d'essais de validation, ce qui est illustré sur la figure 3.18. Nous constatons que les paliers de relaxation sont très bien décrits, quel que soit le niveau de déformation imposé. Remarquons cependant que pour les niveaux de chargement les plus importants ($\varepsilon_{\text{imposed}} > 1$ %), le modèle sur-estime légèrement la déformation résiduelle. Ce défaut a déjà été mis en évidence sur l'essai FRC, et nous pouvons ici constater qu'il est essentiellement dû à une mauvaise prédiction de la fin des trajets de décharge. La réponse prédite en décharge est quasi-linéaire, tandis que les essais nous indiquent que des mécanismes non linéaires sont activés lors de la décharge. Ce point sera discuté plus en détail en section 3.4.2. Mais en dépit de cette remarque, nous pouvons estimer que les essais TRR sont dans l'ensemble très bien reproduits par le modèle, qui permet notamment de bien capturer la transition entre une réponse viscoélastique (recouvrable) et une activation des phénomènes viscoplastiques non-recouvrables.

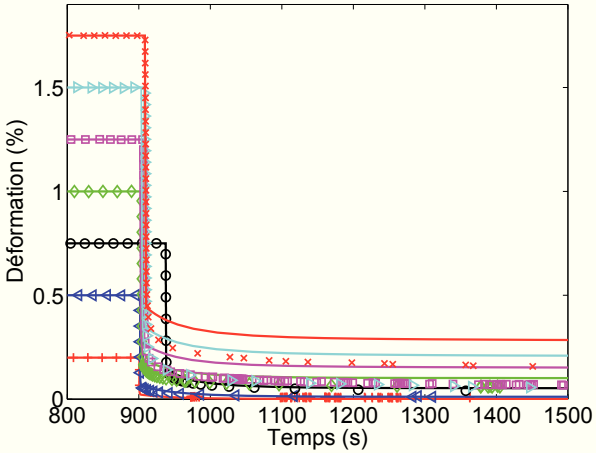
Enfin, les résultats concernant la prédiction des essais de traction répétée par paliers croissants sont regroupés sur la figure 3.19. Mis à part la sur-estimation de la raideur tangente lors des phases de décharge lorsque des niveaux de contraintes élevés ont été atteints (déjà évoquée ci-dessus), la réponse du modèle est très satisfaisante. Les déformations (resp. contraintes) maximales au cours du chargement sont notamment bien prédites sur les essais pilotés en contrainte (resp. en déformation), ainsi que la chute de raideur apparente au fil des cycles.




(a) Courbe contrainte-déformation

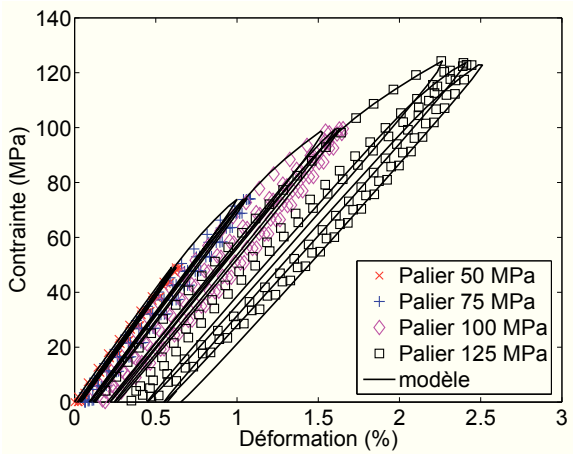



(b) Relaxation de la contrainte

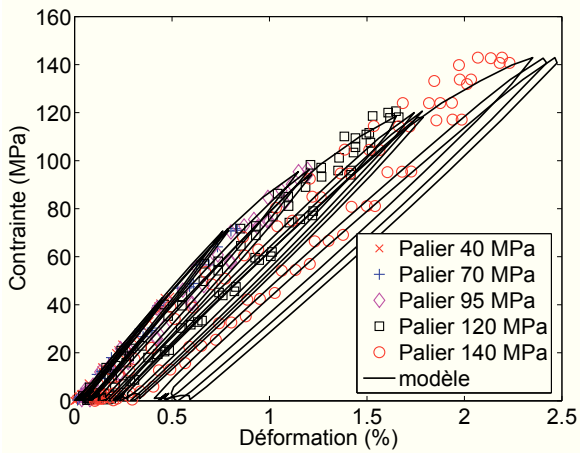



(c) Recouvrance de la déformation

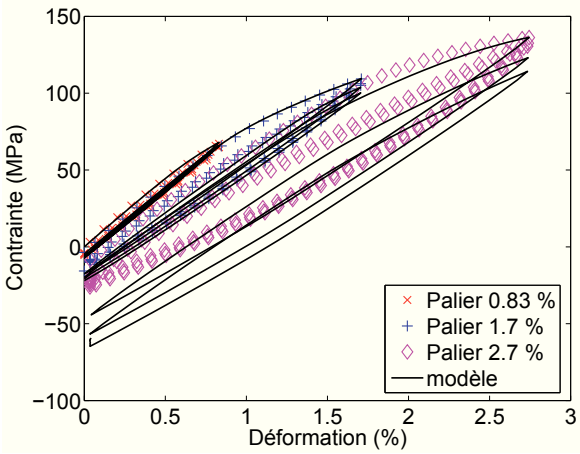
FIGURE 3.18 – Validation du modèle proposé sur les essais TRR, à différents niveaux.




(a) Traction répétée, 2.5 MPa/s




(b) Traction répétée, 250 MPa/s




(c) Traction répétée, 0.016 %/s

FIGURE 3.19 – Validation du modèle proposé sur les essais de traction répétée par paliers croissants.

## 3.3 Sources de dissipation et auto-échauffement

Dans cette section, nous proposons une extension du modèle à un cadre thermo-mécanique couplé. Notre objectif est de tirer parti du suivi de température des essais, pour vérifier que notre estimation des sources de dissipation est correcte.

### 3.3.1 Formulation du modèle thermo-mécanique

L'équation 3.8, écrite à la température de référence $T_0$, peut être reformulée de façon plus générale, en supposant une dépendance de l'énergie libre à la température. Un développement de Taylor au voisinage de l'état d'équilibre permet d'écrire en toute généralité :

$$\begin{aligned} \rho w(\overbrace{\underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{\varepsilon}}_{v1}, \underline{\underline{\varepsilon}}_{v2}, \underline{\underline{\varepsilon}}_{vp}, \underline{\underline{\alpha}}, \beta}^{\text{variables d'état}}, T) &= \rho_0 w_0(\text{variables d'état}) \\ &- (T - T_0)\left(\underline{\underline{k}} : \underline{\underline{\varepsilon}} + \underline{\underline{k}}_1 : \underline{\underline{\varepsilon}}_{v1} + \underline{\underline{k}}_2 : \underline{\underline{\varepsilon}}_{v2} + \underline{\underline{k}}_{vp} : \underline{\underline{\varepsilon}}_{vp} + \underline{\underline{k}}_\alpha : \underline{\underline{\alpha}} + k_\beta \beta\right) \\ &- \frac{1}{2}\rho_0 \frac{c_\varepsilon}{T_0}(T - T_0)^2 - \rho s_0 (T - T_0) + o\left((T - T_0)^2, \| \underline{\underline{\varepsilon}} \|^2, (T - T_0) \| \underline{\underline{\varepsilon}} \|, \ldots\right) \end{aligned} \tag{3.35}$$

On a introduit les coefficients $\underline{\underline{k}}_i \equiv -\rho\, \partial^2 w / \partial \underline{\underline{\varepsilon}}_i \partial T = \partial \underline{\underline{A}}_i / \partial T$ qui représentent les couplages thermomécaniques [8]. $\underline{\underline{k}} \equiv -\partial \underline{\underline{\sigma}} / \partial T$ est appelé tenseur de couplage thermoélastique. $s_0$ est un état entropique initial, $c_\varepsilon$ la chaleur massique (à déformation constante). L'équation de conservation de la masse s'écrit $\rho = \rho_0 \left(1 - \mathrm{Tr}\left(\underline{\underline{\varepsilon}}\right)\right)$ en petites transformations. On suppose [9] que les $\underline{\underline{k}}_i$ sont négligeables devant $\underline{\underline{k}}$ [43].

On définit le flux de chaleur local $\underline{q}$, et on exprime la loi de Fourier, qui relie ce flux au gradient de température : $\underline{q} = -\underline{\underline{\lambda}} \cdot \underline{\nabla T}$. Le premier principe de la thermodynamique permet d'exprimer la dissipation intrinsèque $\mathscr{D}_1$ (en l'absence de source volumique exogène) sous la forme :

$$\mathscr{D}_1 = \rho T \dot{s} + \mathrm{div} \underline{q} \tag{3.36}$$

L'entropie $s$ s'exprime en fonction de l'énergie libre de Helmholtz :

$$s = -\frac{\partial w}{\partial T} \tag{3.37}$$

ce qui permet d'aboutir à l'expression générale de la dissipation intrinsèque :

$$\mathscr{D}_1 = T_0 \frac{\rho}{\rho_0} \underline{\underline{k}} : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}} + \rho c_\varepsilon \dot{T} + \mathrm{div} \underline{q} \tag{3.38}$$

Une hypothèse d'isotropie sur les couplages thermoélastiques ($\underline{\underline{k}} = k \underline{\underline{1}}$) et sur la loi de Fourier ($\underline{\underline{\lambda}} = \lambda \underline{\underline{1}}$) permet d'aboutir à l'équation simplifiée du problème d'évolution thermomécanique :

$$\mathscr{D}_1 - T_0 \left(1 - \mathrm{Tr}\left(\underline{\underline{\varepsilon}}\right)\right) k \mathrm{Tr}\left(\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}\right) + \lambda \Delta T = \rho c_\varepsilon \dot{T} \tag{3.39}$$

L'évolution de la température est donc pilotée par la dissipation intrinsèque, d'origine mécanique, par les effets thermoélastiques ainsi que par la diffusion.

8. $i$ représente formellement $v_1, v_2, vp, \alpha, \beta$ de façon à alléger les écritures, et $\underline{\underline{\varepsilon}}_\alpha$ s'identifie à $\underline{\underline{\alpha}}$, variable d'écrouissage.

9. Cette hypothèse est étayée par le fait que la pente thermo-élastique ne dépende pas de la vitesse de chargement (découplage vis-à-vis de la viscoélasticité court terme), ni du niveau de déformation résiduelle (découplage vis-à-vis des mécanismes viscoplastiques).

### 3.3.2 Application aux essais sur éprouvette

Nous nous plaçons dans le cas de chargements de traction uniaxiale sur des éprouvettes ISO527-2-1A. Les grandeurs mécaniques sont supposées homogènes dans la zone utile de l'éprouvette. Par ailleurs, si on néglige les fuites thermiques par les mors (hypothèse raisonnable au vu de la faible conductivité thermique de notre matériau), le gradient thermique dans le matériau peut être considéré comme 2D :

$$\underline{\nabla T} = \frac{\partial T}{\partial x_2}\underline{e}_2 + \frac{\partial T}{\partial x_3}\underline{e}_3 \tag{3.40}$$

$\underline{e}_1$ est l'axe de chargement, $\underline{e}_2$ et $\underline{e}_3$ sont les directions transverses. Sous cette hypothèse, il est possible d'intégrer l'équation 3.39 sur la section de l'éprouvette $S = l_2 l_3$, où $l_2$ et $l_3$ sont respectivement la largeur et l'épaisseur de l'éprouvette ISO527-2-1A. On utilise la formule d'Ostrogradski et l'expression des conditions aux limites de convection forcée :

$$\int_S \lambda \Delta T \, \mathrm{d}a \equiv \int_S \mathrm{div}\lambda\left(\underline{\nabla T}\right) \mathrm{d}a = \int_{\partial S} \lambda \frac{\partial T}{\partial n} \mathrm{d}l = -\int_{\partial S} h(T - T_0) \, \mathrm{d}l = -2h(l_2 + l_3)(T - T_0) \tag{3.41}$$

où $T_0$ est la température du milieu extérieur, supposée constante et égale à la température initiale de l'éprouvette, et $h$ le coefficient de convection thermique. Nous pouvons ainsi écrire l'équation d'évolution de la température moyenne de l'éprouvette selon :

$$\rho c_\varepsilon \dot{T} = \mathscr{D}_1 - T_0\left(1 - \mathrm{Tr}\left(\underline{\underline{\varepsilon}}\right)\right) k \mathrm{Tr}\left(\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}\right) - \frac{2h(l_2 + l_3)}{l_2 l_3}(T - T_0) \tag{3.42}$$

Le coefficient $h$ est identifié à partir d'essais de refroidissement sur l'éprouvette ISO527-2-1A, pour lesquels $\mathscr{D}_1 = 0$ car il n'y a pas de chargement mécanique. La figure 3.20 illustre la bonne corrélation entre les résultats du modèle (trait continu) et les mesures de température par thermocouple (symboles), pour une valeur optimale de $h = 22.6$ W.K$^{-1}$m$^{-2}$. Cette valeur est cohérente avec les ordres de grandeurs de $h$ utilisés au chapitre 2.

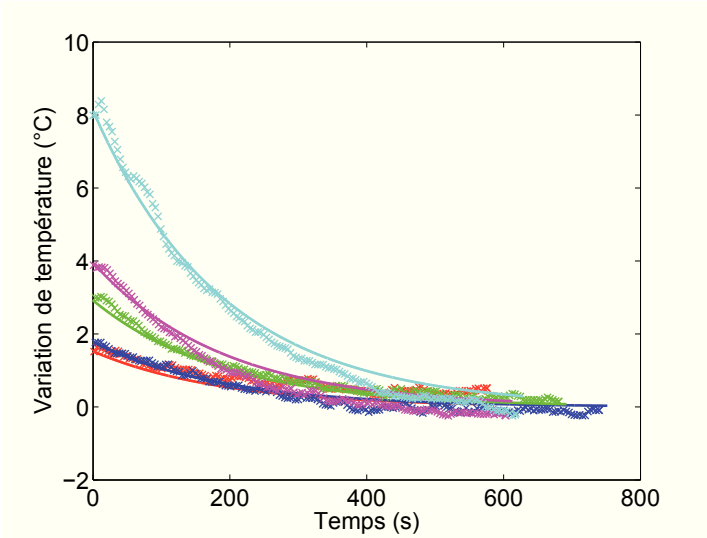



FIGURE 3.20 – Identification du paramètre de convection thermique $h$ pour l'éprouvette ISO527-2-1A en atmosphère « statique », à partir de cinq essais de refroidissement.

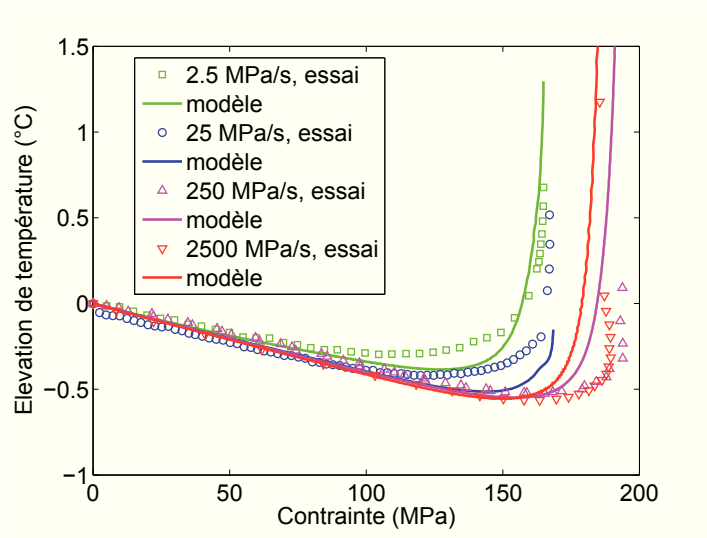



FIGURE 3.21 – Application du modèle thermo-mécanique aux essais de traction monotone, et comparaison aux mesures expérimentales.

Nous nous proposons alors de résoudre l'équation 3.42 à l'aide d'un schéma d'intégration implicite en temps, pour différentes histoire de chargement, et de comparer le résultat obtenu avec les mesures expérimentales. Notons dès à présent que nous comparons la température $T$ moyennée sur la section de l'échantillon avec la mesure de température surfacique (par thermocouple ou par caméra infra-rouge) : cette confusion est admise du fait de la faible taille du volume utile de l'éprouvette, mais est potentiellement une source d'erreur.

### a Courbes de traction monotone

Il est nécessaire de caractériser le coefficient $k$, puisque les essais de traction monotone font intervenir le couplage thermoélastique. Une identification inverse permet d'aboutir à la valeur $k = 1.49$ MPa.K$^{-1}$. Il est plus usuel de travailler avec le coefficient de dilatation thermique $\alpha_{th}$, défini dans le cas isotrope par $\alpha_{th} = k(1-2\nu)/E_e$, où $\nu$ est le coefficient de Poisson du matériau. Des mesures de champ de déplacement nous ont permis d'estimer la valeur de $\nu$ à 0.34 dans le cas de l'éprouvette ISO527-2-1A. Nous trouvons alors $\alpha_{th} = 4.22\times10^{-5}$ K$^{-1}$, ce qui est cohérent avec les ordres de grandeur publiés dans la littérature au sujet du PA66-GF35.

La corrélation calcul-essai obtenue avec cette valeur de $k$ est présentée sur la figure 3.21. Malgré les hypothèses émises lors de la construction du modèle couplé thermo-mécanique, nous constatons que le modèle de comportement permet d'évaluer correctement les termes sources du calcul thermique. La sensibilité à la vitesse de chargement est ainsi qualitativement bien décrite.

Les hypothèses qui devraient sans doute être remises en cause au premier chef sont l'homogénéité de la température dans la section de l'éprouvette ainsi que l'isotropie du couplage thermoélastique. Le premier point suppose la mise en place d'une résolution par éléments finis de l'équation locale 3.39, tandis que les travaux de Dray Bensahkoun [64] (par exemple) illustrent la façon d'appliquer les modèles d'homogénéisation au cadre thermoélastique, comme réponse au second point.

### b Essais d'auto-échauffement

Les essais d'auto-échauffement (AE) consistent en l'application d'un chargement en contrainte selon un signal sinusoïdal à la fréquence 1 Hz (voir la figure 3.22). Les amplitudes du signal de contrainte sont représentatives de la gamme de sollicitations en fatigue. La température surfacique de l'éprouvette est mesurée par thermocouple, et nous avons pu constater qu'après 1000 cycles, cette température (mesurée à la fin de chaque cycle) est stationnaire. Nous avons simulé le chargement mécanique cyclique de façon à calculer l'énergie dissipée sur chaque cycle $\Delta W_{\text{diss}}$, qui s'identifie à $\int_{\text{cycle}} \mathscr{D}_1(t)\,\mathrm{d}t$. La résolution de l'équation 3.42 ne fait plus intervenir le terme de couplage thermoélastique, qui s'annule sur un cycle. Le coefficient $h$ est toujours égal à 22.6 $\mathrm{W.K^{-1}m^{-2}}$.

Nous présentons sur la figure 3.23 la comparaison entre la prédiction de l'élévation de température et les mesures expérimentales, pour différentes amplitudes du signal de contrainte. Nous constatons une bonne corrélation entre la simulation et les essais, à la fois pour la valeur stabilisée d'auto-échauffement, mais aussi pour l'évolution transitoire. La sous-estimation de la température d'auto-échauffement pour le chargement le plus sévère est liée à une mauvaise estimation de la dissipation intrinsèque par cycle. Nous avons en effet pu vérifier que le modèle de comportement prédit des aires d'hystérèse inférieures aux aires mesurées expérimentalement. Ceci peut s'expliquer par le fait que l'élévation de température du matériau a une influence sur la réponse mécanique : les paramètres du modèle identifiés dans les conditions standard ne sont plus valides ici [10]. Il est également possible que le modèle de comportement proposé soit moins prédictif aux amplitudes de contrainte les plus élevées ; ce point sera discuté en section 3.4.2.

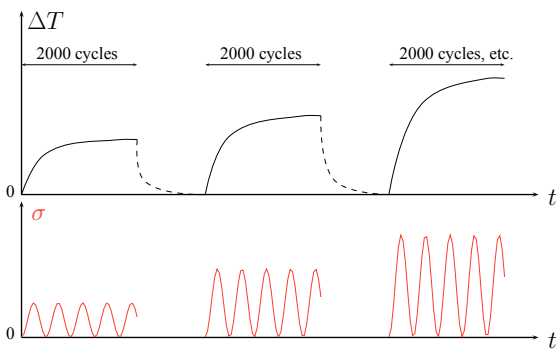



FIGURE 3.22 – Schéma de principe des essais d'auto-échauffement : chargements sinusoïdaux en contrainte à 1 Hz, d'amplitude croissante, interrompus par des périodes de refroidissement.

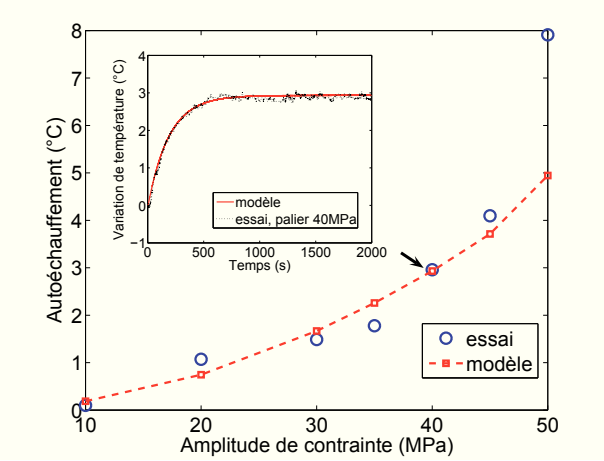



FIGURE 3.23 – Application du modèle thermomécanique aux essais d'autoéchauffement : simulation de l'élévation de température en fonction de l'amplitude du signal de contrainte appliqué.

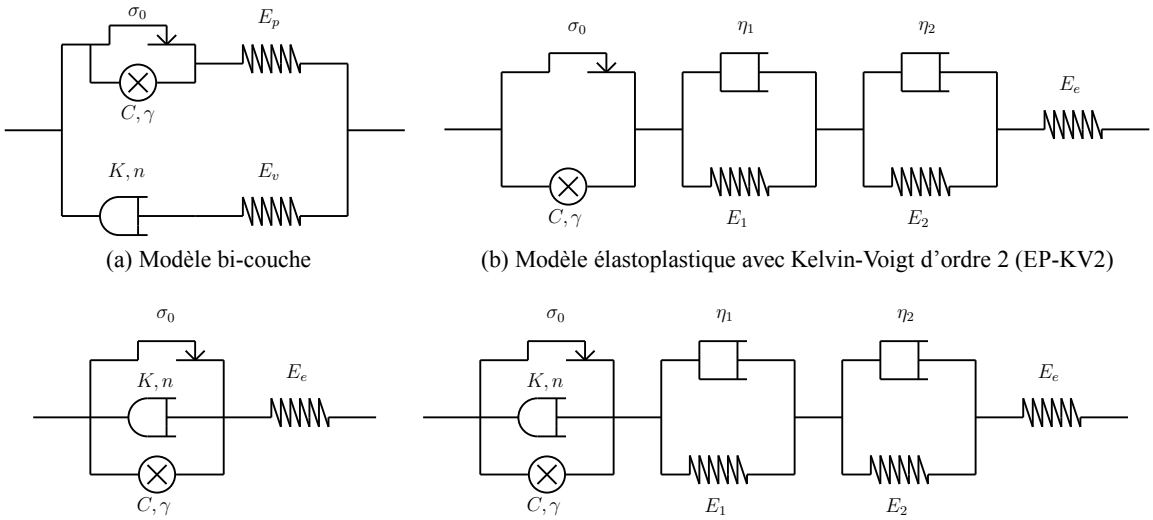
Nous pouvons retenir de ces comparaisons que le développement du modèle thermomécanique a permis de confronter avec succès les prédictions de variation de température avec les mesures expérimentales. Certaines hypothèses pourraient certainement être améliorées, mais nous montrons ici la pertinence du modèle de comportement pour évaluer les sources de dissipation.

10. Nous avons utilisé les résultats du chapitre 4 pour réaliser une simulation tenant compte de l'évolution des paramètres du modèle en fonction de la température. La correction est mineure, ce qui signifie que l'erreur provient sans doute d'une moins bonne estimation de l'aire d'hystérèse aux niveaux de contrainte les plus élevés.

## 3.4 Discussion

### 3.4.1 Comparaison avec des modélisations alternatives

Nous discutons ici de quelques alternatives concernant la modélisation du comportement cyclique. Nous présentons des modèles phénoménologiques que nous avons étudiés lors de notre étape de construction du modèle, et nous expliquons les raisons pour lesquelles ils n'ont pas été retenus. Les schémas rhéologiques associés à chacun de ces modèles sont présentés sur la figure 3.24.




(a) Modèle bi-couche

(b) Modèle élastoplastique avec Kelvin-Voigt d'ordre 2 (EP-KV2)

(c) Modèle élastoviscoplastique (EVP)

(d) Modèle élastoviscoplastique avec Kelvin-Voigt d'ordre 2 (EVP-KV2)

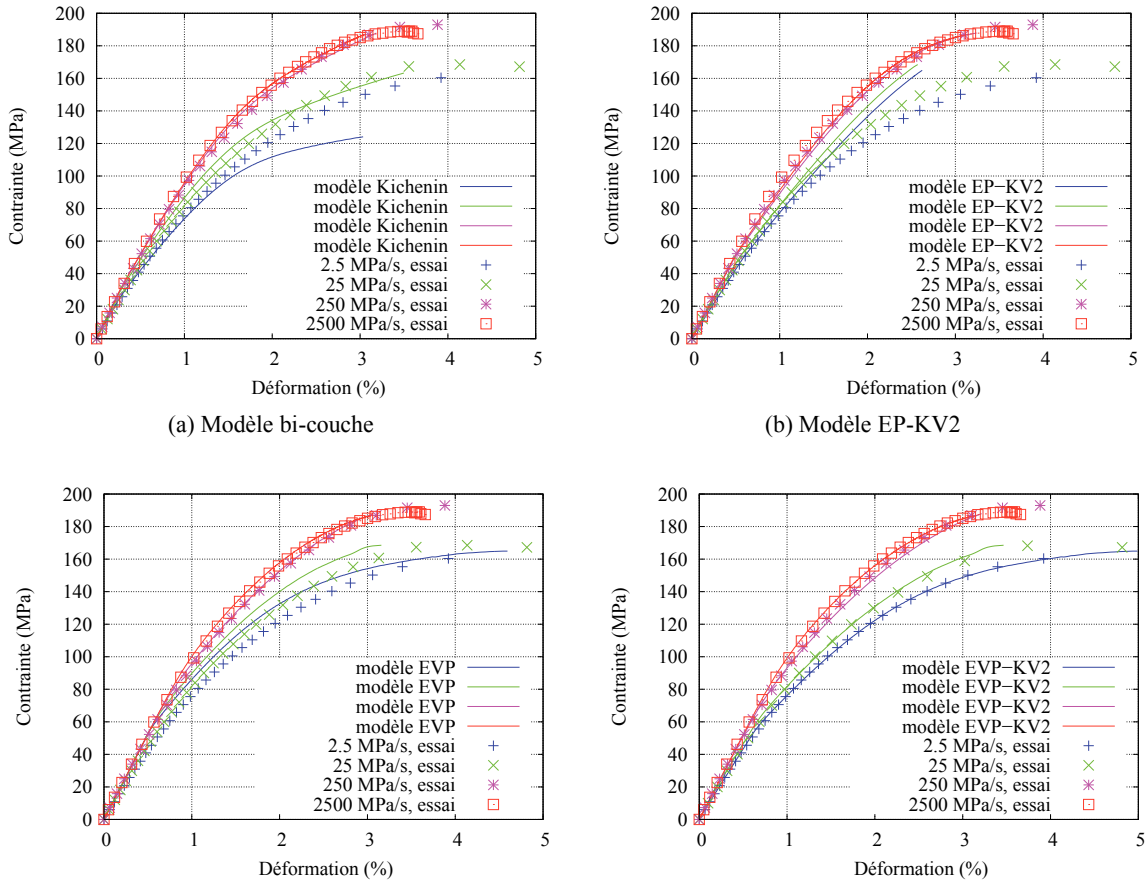
FIGURE 3.24 – Schémas rhéologiques unidimensionnels d'autres modèles phénoménologiques.

Tout d'abord, le modèle bi-couche a été proposé par Kichenin et al. [110, 111] de façon à décrire le comportement d'un polyéthylène non chargé, pour lequel les auteurs ont mis en évidence un découplage entre les mécanismes visqueux et plastiques (comme c'est le cas pour notre matériau). De façon à généraliser le modèle d'écrouissage cinématique linéaire initialement proposé par les auteurs, nous avons implémenté ce modèle avec une loi de type Armstrong-Frederick. Par ailleurs, la loi d'écoulement visqueux est non linéaire, et répond à un potentiel de Norton-Hoff :

$$\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}_v = \frac{3}{2}\left(\frac{\mathcal{J}_v}{K}\right)^n \frac{\mathbb{K} : \underline{\underline{\sigma}}_v}{\mathcal{J}_v} \tag{3.43}$$

où $\underline{\underline{\varepsilon}}_v$ est la déformation de l'élément visqueux non linéaire, et $\mathcal{J}_v$ la contrainte équivalente de von Mises liée à la contrainte $\underline{\underline{\sigma}}_v$ de l'élément visqueux. Le modèle bi-couche ne permet cependant pas de bien décrire les essais de traction monotone sur la gamme de vitesse étudiée (voir la figure 3.25a). En effet, la formulation visqueuse non linéaire n'est pas assez riche pour permettre de décrire à la fois la sensibilité de la raideur à la vitesse de chargement ainsi que la réponse à niveau de contrainte plus élevé. Des essais avec des paliers de maintien (comme l'essai FRC) montrent également que ce modèle ne peut décrire correctement la réponse visqueuse sur plusieurs échelles de temps.

De façon à améliorer la description de la viscosité à court et long terme, nous pouvons imaginer le modèle EP-KV2, qui présente deux temps viscoélastiques caractéristiques. Cette fois encore, nous constatons que les essais de traction mononotone suffisent à mettre ce modèle en défaut, comme illustré sur la figure 3.25b. Ceci s'explique par la formulation plastique indépendante du temps, qui




(a) Modèle bi-couche

(b) Modèle EP-KV2

(c) Modèle EVP unifié

(d) Modèle EVP-KV2

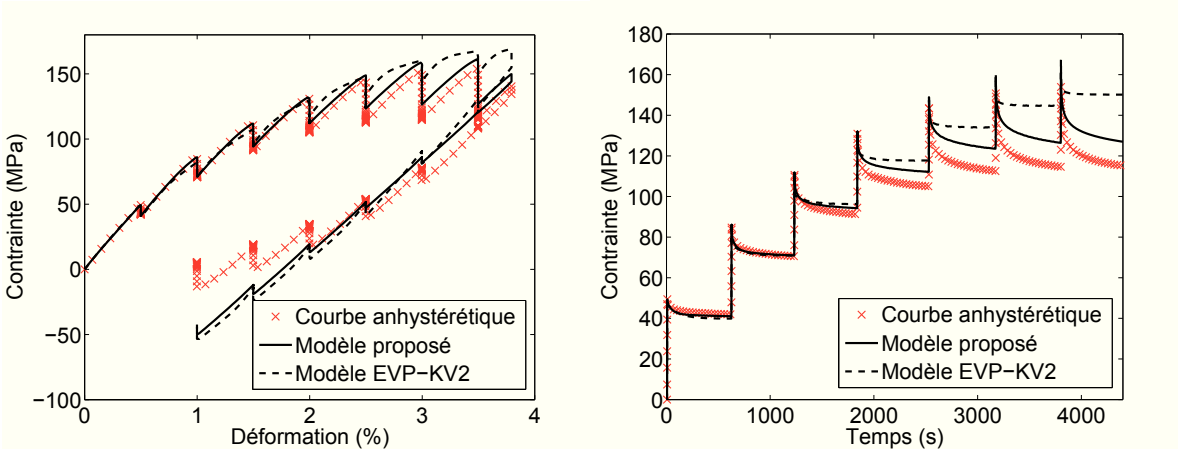
FIGURE 3.25 – Prédiction des essais de traction monotone avec d'autres modèles phénoménologiques.

n'est pas adaptée pour décrire la réponse du matériau à des niveaux de contrainte moyens ou élevés pour différentes vitesses de chargement.

D'une façon générale, nous pouvons constater que les modèles viscoplastiques sont bien plus pertinents pour représenter la réponse non linéaire du matériau lors d'essais de traction monotone. Le modèle EVP, dit *unifié*, partage la déformation en une composante élastique et une composante viscoplastique qui répond *à la fois* à un potentiel de Norton et à une loi d'écrouissage cinématique non linéaire [39]. Même si ce modèle ne peut permettre de décrire des phénomènes visqueux découplés des phénomènes plastiques (tels que la sensibilité de la raideur initiale à la vitesse du chargement – voir la figure 3.25c, ou encore des effets de fluage/recouvrance à faible niveau de contrainte), la formulation viscoplastique présente des caractéristiques intéressantes.

C'est la raison pour laquelle un enrichissement possible du modèle EVP unifié est le modèle EVP-KV2, où l'introduction de deux éléments de Kelvin permet de corriger ces défauts. Nous constatons sur la figure 3.25d un très bon accord entre la prédiction du modèle et les données expérimentales pour les essais de traction monotone. Un tel modèle est également capable de rendre compte d'effets de fluage/recouvrance découplés de la plasticité. Une telle modélisation semble donc être pertinente pour rendre compte du comportement cyclique non linéaire de notre matériau.

Cependant, comme nous l'avons évoqué, la courbe anhystérétique est un excellent moyen de discriminer différentes modélisations envisageables. De façon intrinsèque, cet essai permet de comparer entre elles les lois d'écoulement visqueux. La figure 3.26 présente ainsi la comparaison entre la réponse du modèle EVP-KV2 avec la prédiction du modèle de comportement proposé. Nous constatons que les amplitudes de relaxation, et surtout les vitesses de relaxation sont très mal prédites par le modèle EVP-KV2. Il est possible de rétorquer que nous présentons ici les résultats du modèle EVP-KV2 avec les paramètres directement issus d'une identification sur les essais de traction monotone, alors que nous avons montré auparavant la nécessité d'une stratégie d'un compromis pour parvenir à une réponse acceptable sur les deux types d'essais. Néanmoins, aucun jeu de paramètres ne permet, avec le modèle EVP-KV2, de parvenir à décrire correctement la courbe anhystérétique : il n'est donc pas question de compromis ici, mais bien de pertinence de la formulation.




(a) Courbe contrainte-déformation

(b) Réponse temporelle en contrainte

FIGURE 3.26 – Comparaison entre la réponse du modèle proposé et celle du modèle EVP-KV2 pour la prédiction de la courbe anhystérétique.

### 3.4.2 Pistes d'amélioration du modèle

#### a Prédiction de la décharge

Nous avons remarqué que le modèle de comportement proposé ne permet pas de décrire correctement les phases de décharge lorsque des niveaux de contraintes élevés sont atteints. Cette limite du modèle est à l'origine de la sur-évaluation de la déformation résiduelle, mentionnée pour certains chargements (TRR, FRC). Néanmoins, comme nous l'avons mis en évidence lors de notre étude bibliographique (section 1.3.2), la description des trajets de décharges nécessite la modélisation de mécanismes activés lors de la décharge uniquement [11, 48, 67], ou bien décrivant des transformations structurales [155, 156, 176]. Les modèles développés pour les alliages à mémoire de forme, fondés sur la description de mécanismes de changement de phase, peuvent servir d'inspiration dans cette optique. Il est également envisageable de travailler sur la formulation de la fonction de charge $f$ ou de la loi d'écoulement visqueux, de façon à introduire une dépendance à la pression hydrostatique [77, 161].

#### b Prédiction du rochet plastique

Nous pouvons observer lors des essais de traction répétée une légère sur-estimation du rochet plastique. Chaboche [38] et Ohno et Wang [152] ont montré, sur des matériaux métalliques, que ce phénomène peut être imputé à la formulation d'Armstrong-Frederick de l'écrouissage cinématique. Des lois d'écrouissage plus évoluées ont été développée dans la littérature [106], et peuvent être envisagées pour les thermoplastiques chargés.

Le modèle de comportement proposé est donc susceptible d'être modifié, de façon à enrichir la description des phénomènes modélisés, et donc à affiner la qualité de la prédiction de la réponse mécanique. Néanmoins, les limitations relevées sont surtout pertinentes pour des chargements faisant intervenir des niveaux de contrainte élevés, et donc peu représentatifs de la gamme des chargements en fatigue. C'est la raison pour laquelle nous considérons que le modèle proposé constitue en l'état un compromis satisfaisant entre prédictivité et complexité, applicable dans un cadre industriel.

### 3.4.3 Prédiction des aires d'hystérèse

Les aires d'hystérèse, qui correspondent dans le cas d'un chargement uniaxial à la densité d'énergie mécanique totale apportée par le milieu extérieur sur un cycle $\Delta W_{\text{tot}} = \int_{\text{cycle}} \sigma \, \mathrm{d}\varepsilon$, c'est-à-dire à la densité d'énergie dissipée $\Delta W_{\text{diss}}$ en régime stationnaire (voir annexe B.4), sont dans le cas général bien prédites pour la plupart des essais cycliques que nous avons réalisés. C'est particulièrement vrai pour les essais comprenant des paliers de maintien (essais TRR ou FRC). Remarquons cependant que les essais de traction répétée pilotés en contrainte (à 2.5 MPa/s), ainsi que certains essais d'auto-échauffement, induisent une légère sous-estimation de l'aire d'hystérèse lors du calcul.

En ce qui concerne les essais d'auto-échauffement (pour lesquels la comparaison est présentée lors du cycle n° 2000), nous avons remarqué que l'erreur est d'autant plus importante que l'amplitude du chargement est élevée. Il est ainsi probable que la sous-estimation de l'aire d'hystérèse soit liée à la mauvaise prédiction de la décharge.

### 3.4.4 Bilan

Le modèle de comportement proposé permet de reproduire avec succès plusieurs caractéristiques physiques de la réponse mécanique du matériau étudié, dans les conditions standard. Ainsi, les équations du comportement permettent de décrire les effets viscoélastiques (sur deux échelles de temps), les effets viscoplastiques qui combinent une loi d'écrouissage cinématique non linéaire avec une loi d'écoulement visqueux sans seuil, ainsi que l'adoucissement cyclique. Les paramètres du modèle ont été identifiés en tirant partie de découplages mis en évidence expérimentalement. Une étape de validation a permis de confirmer la pertinence du modèle pour décrire le comportement cyclique du matériau, pour des histoires de chargement complexes.

Nous avons montré que la principale limitation du modèle réside dans la prédiction des phases de décharge, ce qui peut induire une sur-estimation de la déformation résiduelle, ainsi qu'une mauvaise estimation de l'aire d'hystérèse lorsque des niveaux de contraintes élevés sont atteints. Néanmoins, nous avons jugé que le modèle représente un bon compromis complexité/prédictivité pour être appliqué à la simulation de chargements de fatigue.

Nous avons travaillé dans ce chapitre à partir d'essais réalisés dans des conditions standard (23 °C, $\mathcal{H}$=50 %). Or, comme nous l'avons montré lors de l'analyse de sollicitations en service (chapitre 2),

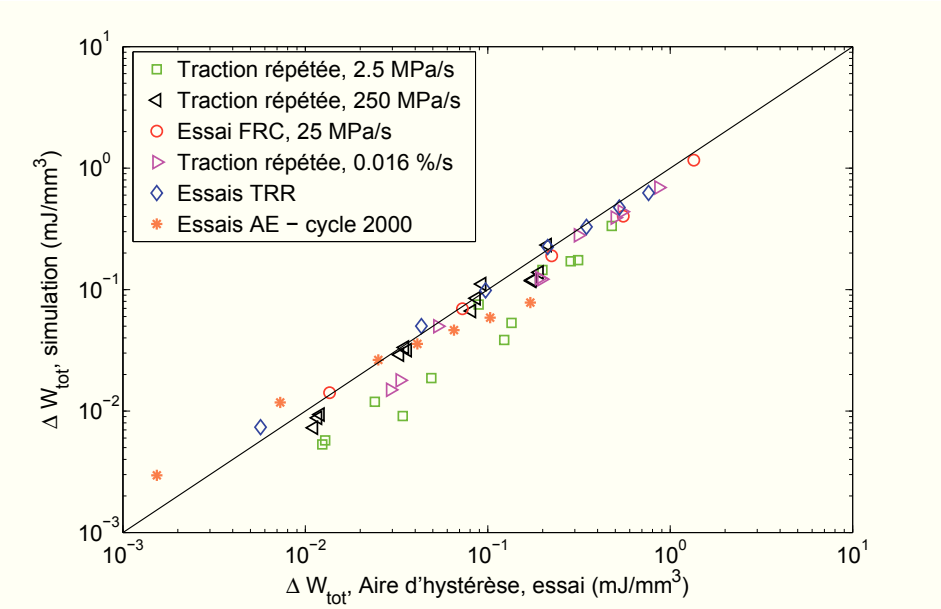



FIGURE 3.27 – Comparaison entre les densités d'énergie mécanique apportées par le milieu extérieur par cycle (i.e. les aires de boucles dans le plan contrainte-déformation) mesurées expérimentalement ou prédites par le modèle de comportement, pour chaque cycle des essais TRR, FRC, de traction répétée et d'auto-échauffement.

il est nécessaire de pouvoir caractériser la réponse mécanique pour différentes conditions environnementales. Ce sera l'objet du chapitre 4.

Enfin, le modèle a été développé dans un cadre tri-dimensionnel général, mais nous n'avons présenté son application qu'à partir d'une seule distribution d'orientation des fibres, isotrope transverse avec un fort taux d'alignement des fibres. De façon à pouvoir appliquer ce modèle sur des structures industrielles, il est nécessaire de proposer un lien avec la microstructure locale du matériau, c'est-à-dire avec le procédé de mise en forme par injection. L'extension et la validation du modèle dans un cadre anisotrope seront présentées dans le chapitre 5.

# Chapitre 4

# Influence des conditions environnementales sur le comportement mécanique

**Sommaire**


**4.1 Identification et validation thermo-hygrométrique du modèle . . . . . 91**
4.1.1 Conditions expérimentales . . . . . 91
4.1.2 Identification des paramètres . . . . . 92
4.1.3 Validation du modèle sous différentes conditions environnementales . . . . 93
**4.2 Influence de l'humidité sur la température de transition vitreuse . . . . . 97**
4.2.1 État de l'art . . . . . 97
4.2.2 Détermination expérimentale dans le cas du PA66-GF35 . . . . . 99
**4.3 Équivalence température-humidité . . . . . 100**
4.3.1 Essais de DMA . . . . . 100
4.3.2 Essais de comportement . . . . . 101
**4.4 Dépendance des paramètres matériaux à l'environnement . . . . . 102**
4.4.1 Application de l'équivalence température-humidité . . . . . 102
4.4.2 Discussion . . . . . 103


Ce chapitre présente l'application du modèle de comportement à différentes conditions environnementales. Une large gamme de conditions hygrothermiques est étudiée, ce qui correspond aux sollicitations rencontrées lors de la vie en service. La double sensibilité à la température et au taux d'humidité est résumée à travers un seul paramètre, l'écart à la température de transition vitreuse. Cette équivalence température-humidité est mise en évidence expérimentalement, et permet d'étudier l'évolution des coefficients du modèle de comportement en fonction du paramètre $T - T_g$.

## 4.1 Identification et validation thermo-hygrométrique du modèle

### 4.1.1 Conditions expérimentales

Dans ce chapitre, chacune des conditions expérimentales étudiée a fait l'objet d'une campagne expérimentale calquée sur celle présentée en conditions standard (voir le chapitre 3). Nous avons réalisé des essais à température ambiante ($T$=23 °C), avec des éprouvettes ISO527-2-1A conditionnées

à l'équilibre avec des taux d'humidité $\mathcal{H}$ de 20, 27, 33 et 75 %, ainsi qu'avec des éprouvettes sèches dites « DAM » (*dry-as-moulded*). Des essais en température ont été effectués sur des éprouvettes sèches (DAM, $T$=110 ˚C et DAM, $T$=140 ˚C) ainsi que sur des éprouvettes conditionnées (conditions mixtes : $\mathcal{H}$=50 %, $T$=60 ˚C ; $\mathcal{H}$=50 %, $T$=90 ˚C et $\mathcal{H}$=72 %, $T$=70 ˚C).

Les éprouvettes testées à température ambiante ont fait l'objet du même protocole expérimental que celui présenté au chapitre 3 ; un conditionnement effectué au préalable a permis d'atteindre le taux d'humidité cible. Puisque les cinétiques de prise/perte en eau sont lentes à 23 ˚C (voir le chapitre 2), la teneur en eau des éprouvettes est supposée constante durant les essais, ce qui a été vérifié par des suivis de masse. En revanche, les essais en température ont été réalisés dans une enceinte climatique, de façon à garantir que le taux d'humidité reste constant, puisque la cinétique de diffusion de l'eau est beaucoup plus importante. La figure 4.1 présente le montage expérimental. La même machine de traction INSTRON est utilisée, avec des mors mécaniques, et un extensomètre bi-axial (modèle EPSILON 3560) compatible avec les conditions hygrothermiques.

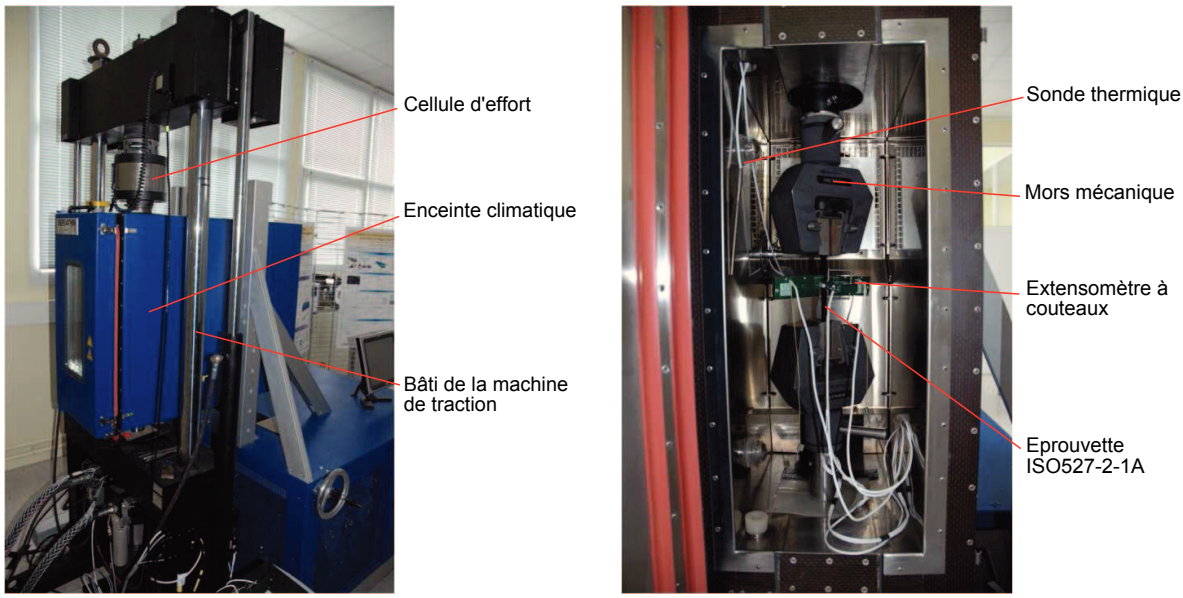



FIGURE 4.1 – Montage expérimental avec enceinte climatique.

### 4.1.2 Identification des paramètres

Pour chaque condition environnementale, nous avons appliqué la stratégie d'identification présentée en section 3.2.3. Nous ne présentons pas ici les différentes étapes, mais seulement les résultats finaux. La figure 4.2 présente les corrélations calcul-essai sur les courbes de traction monotone réalisées à différentes vitesses de contrainte imposée, pour les essais à température ambiante. Notons la bonne capacité du modèle à décrire l'influence de la vitesse du chargement. Par ailleurs, la modélisation est suffisamment riche pour permettre de décrire la réponse en conditions sèches, très raide et pour laquelle la viscoélasticité à court terme est inactivée ($E_{v2} \gg E_e^0$), ainsi que la réponse en conditions humides, où l'on remarque bien l'effet plastifiant de l'eau sur la réponse mécanique : fort allongement à rupture, forte sensibilité à la vitesse de chargement, fort écrouissage.

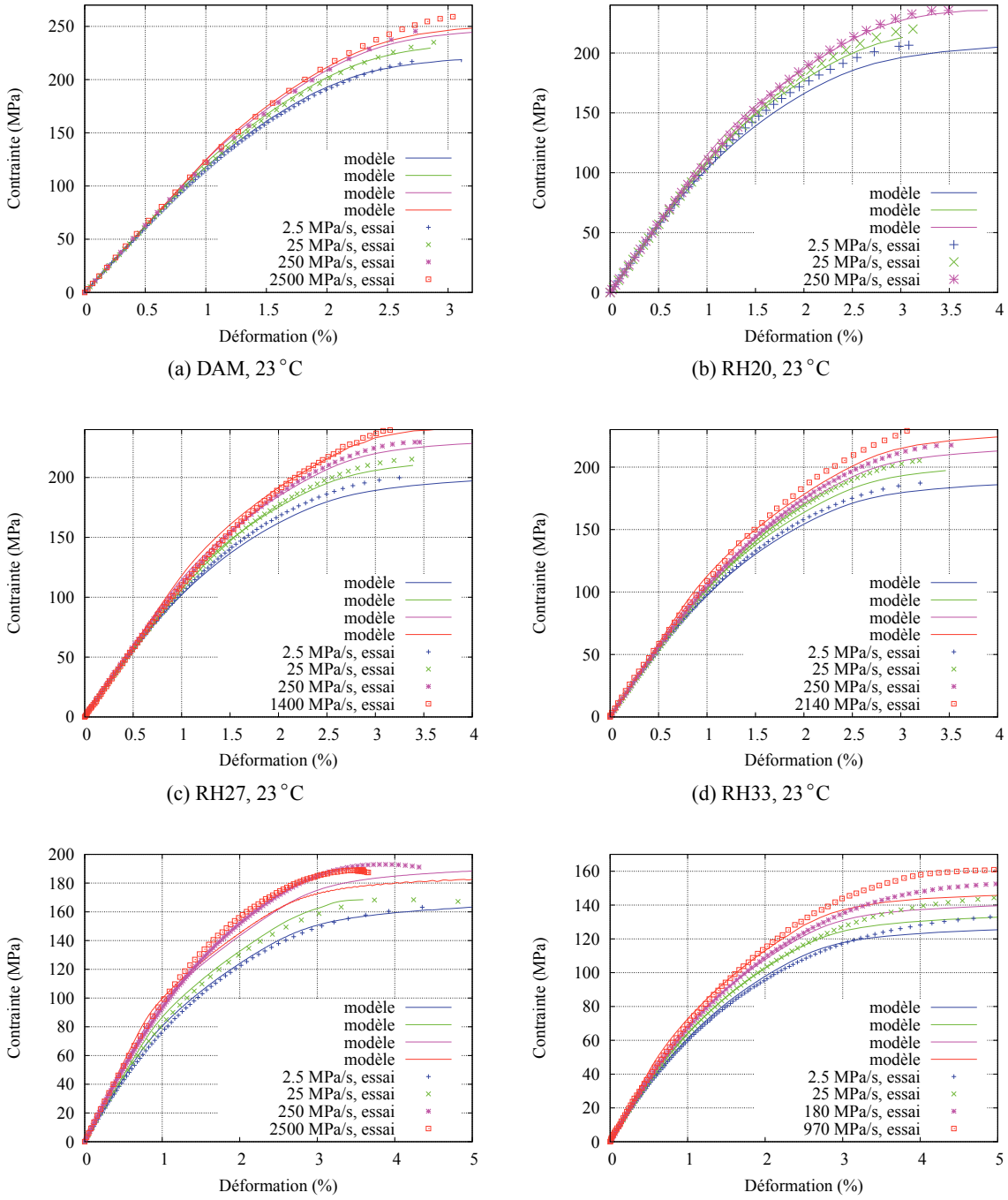
L'influence de la température sur les courbes de traction monotone est présentée sur la figure 4.3. Notons que les allongements à rupture sont de plus en plus importants, ce qui est très bien décrit

par le modèle, et qui dénote la forte activation des mécanismes viscoplastiques. Dans chacune de ces conditions environnementales, l'identification des paramètres viscoélastiques repose sur la courbe anhystérétique, qui présente toujours une très bonne corrélation calcul-essai (du moins sur la phase de charge).

### 4.1.3 Validation du modèle sous différentes conditions environnementales

Nous présentons sur la figure 4.4 quelques essais FRC, qui constituent des essais de validation (hormis le premier cycle qui permet de caractériser la réponse viscoélastique long terme). Nous mettons ainsi en évidence la robustesse de notre procédure d'identification, qui est validée pour chacune des conditions environnementales.

La richesse du modèle de comportement, développé à partir de la réponse dans les conditions standard et modélisant de nombreux mécanismes physiques, permet ainsi de décrire la réponse mécanique pour une large gamme de conditions hygrothermiques. La modélisation phénoménologique proposée est ainsi pertinente en-deçà, au-delà et au voisinage de la température de transition vitreuse du matériau. En comparaison, la grande majorité des modèles de comportement présentés dans la littérature pour les matériaux polymères ne sont valides que sur un domaine de température assez restreint.

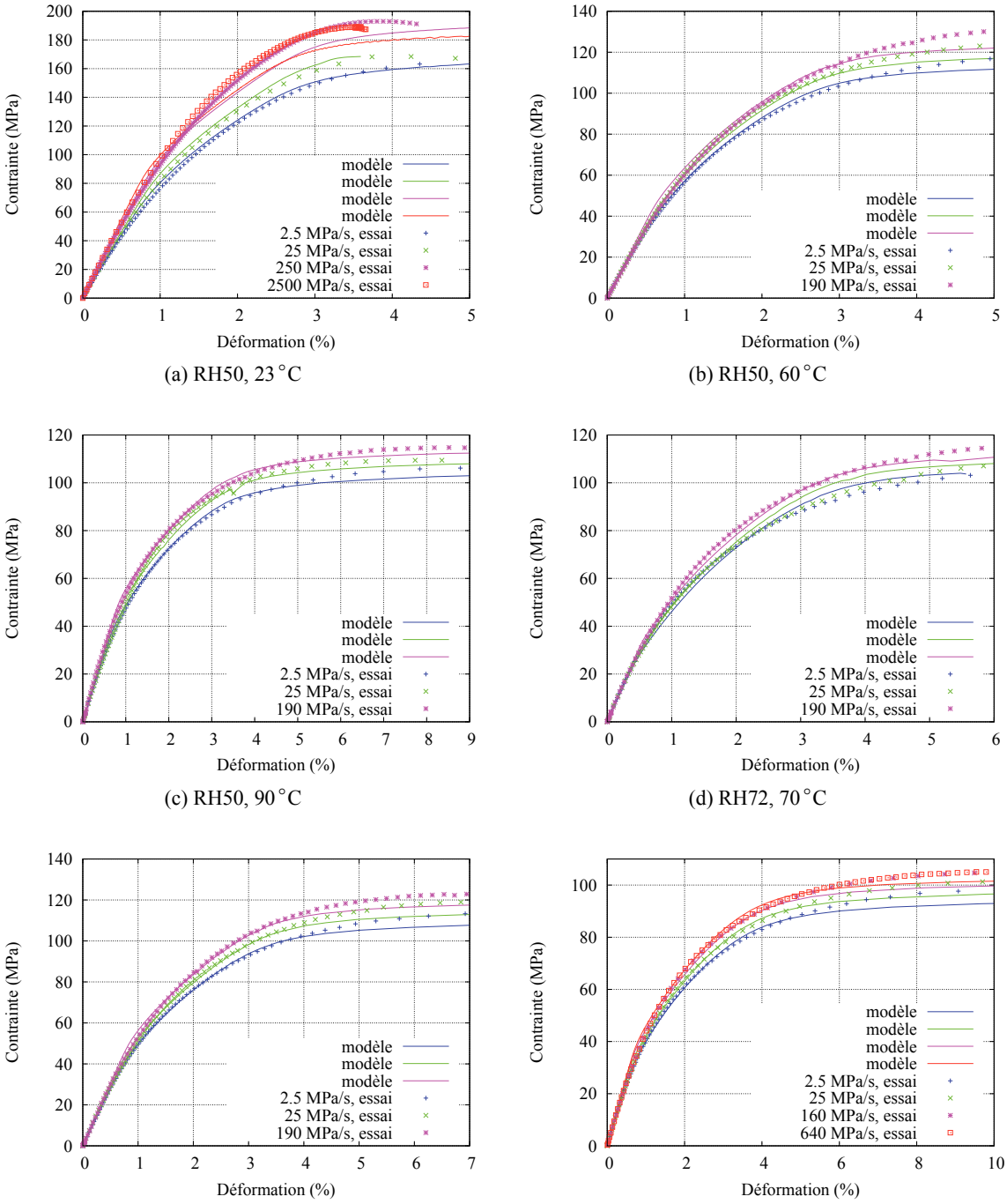



(a) DAM, 23 °C (b) RH20, 23 °C

(c) RH27, 23 °C (d) RH33, 23 °C

(e) RH50, 23 °C (f) RH75, 23 °C

FIGURE 4.2 – Essais de traction monotone pour plusieurs vitesses de contrainte imposées, à température ambiante pour plusieurs taux d'humidité.




(a) RH50, 23 °C

(b) RH50, 60 °C

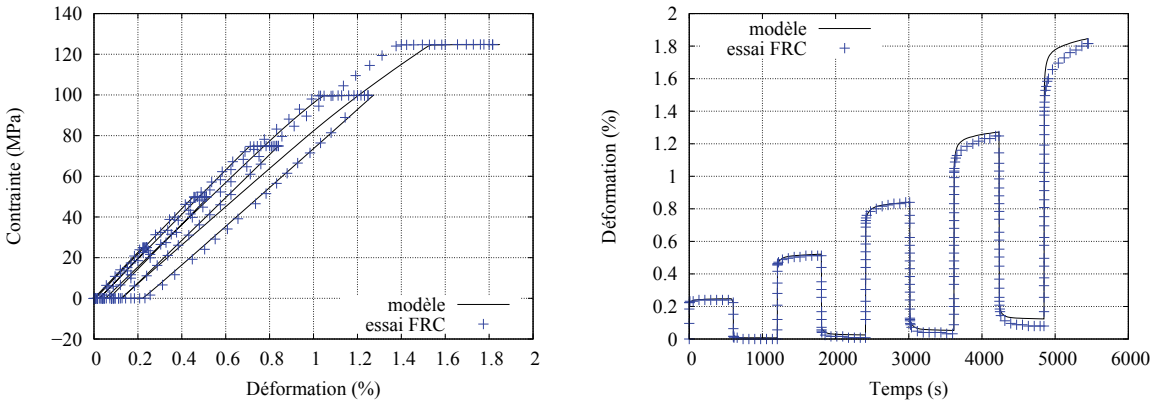
(c) RH50, 90 °C

(d) RH72, 70 °C

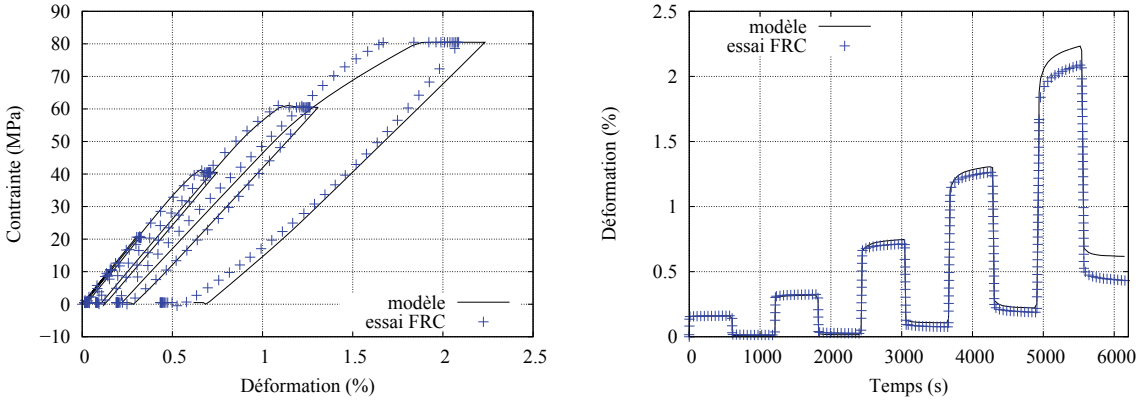
(e) DAM, 110 °C

(f) DAM, 140 °C

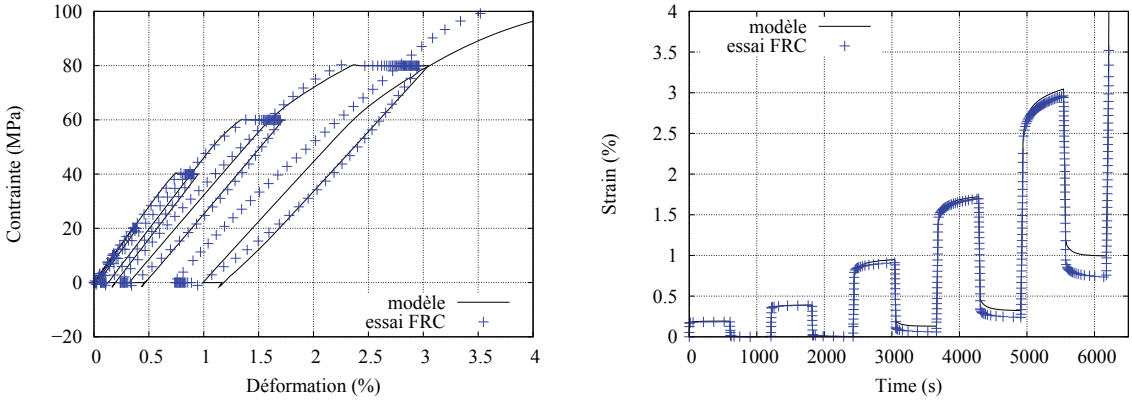
FIGURE 4.3 – Essais de traction monotone pour plusieurs vitesses de contrainte imposées, sous différentes conditions environnementales.




(a) Essai trapèze à 25 MPa/s, $\mathcal{H}$=33 %, $T$=23 ˚C




(b) Essai trapèze à 25 MPa/s, $\mathcal{H}$=50 %, $T$=60 ˚C




(c) Essai trapèze à 25 MPa/s, DAM, $T$=110 ˚C

FIGURE 4.4 – Essais FRC sous différentes conditions environnementales.

## 4.2 Influence de l'humidité sur la température de transition vitreuse

Nous savons que la température de transition vitreuse joue un rôle de premier plan sur les caractéristiques de la réponse mécanique des matériaux polymères. De façon à mieux comprendre l'influence de la teneur en eau sur le comportement cyclique, mise en évidence dans la section précédente, nous cherchons ici à quantifier le lien entre le taux d'humidité ambiant (à l'équilibre hygrométrique) et la température de transition vitreuse.

### 4.2.1 État de l'art

De nombreux auteurs se sont penchés sur la sensibilité de la température de transition vitreuse ($T_g$) à la teneur en eau. Les travaux de Puffr et Šebenda [172] ont été parmi les premiers à mettre en évidence les mécanismes de diffusion de l'eau dans un thermoplastique semi-cristallin. La fixation des molécules d'eau par le réseau polymérique se traduit par un écartement des chaînes à l'état amorphe, qui ont donc davantage de mobilité pour se mouvoir les unes par rapport aux autres. L'énergie à apporter depuis le milieu extérieur (sous forme de chaleur par exemple) pour activer cette mobilité est donc moindre, ce qui se traduit par une température de transition vitreuse plus faible. Les polyamides (PA6 ou PA66), fortement hydrophiles, présentent donc une forte senbilité de $T_g$ à $\mathcal{H}$, comme nous l'avons montré en section 1.2.4.

Il existe dans la littérature plusieurs modèles permettant de décrire l'évolution de la température de transition vitreuse en fonction du taux d'humidité. Tout d'abord, l'équation de Fox est une relation empirique, semblable à une loi des mélanges en $1/T_g$ [183]. Elle suppose ainsi une variation de $T_g$ (en degré Kelvin) en fonction de la concentration massique en eau $C_{\mathrm{H_2O}}$ selon :

$$\frac{1}{T_g} = \frac{C_{\mathrm{H_2O}}}{T_g^{\mathrm{eau}}} + \frac{1 - C_{\mathrm{H_2O}}}{T_g^0} \tag{4.1}$$

où la transition vitreuse de l'eau est estimée à 135 K, et où $T_g^0$ est la valeur de $T_g$ mesurée sur un matériau sec. L'équation d'Ellis-Karasz, quant à elle, est issue d'une approche thermodynamique exprimant une évolution continue de l'entropie de la phase amorphe entre l'état vitreux et l'état caoutchoutique. Ce modèle fait intervenir les variations de chaleur spécifique de chacun des deux constituants au passage de leur transition vitreuse [183] :

$$T_g = \frac{f C_{\mathrm{H_2O}} \cdot \Delta c_p^{\mathrm{eau}} \cdot T_g^{\mathrm{eau}} + \left(1 - C_{\mathrm{H_2O}}\right) \Delta c_p^{\mathrm{PA66}} \cdot T_g^0}{f C_{\mathrm{H_2O}} \cdot \Delta c_p^{\mathrm{eau}} + \left(1 - C_{\mathrm{H_2O}}\right) \Delta c_p^{\mathrm{PA66}}} \tag{4.2}$$

Le paramètre $f$ est égal à 1 dans la formulation initiale de l'équation d'Ellis-Karasz ; dans sa version modifiée on choisira $f < 1$. Citons également l'équation de Reimschuessel [175], qui décrit l'évolution de $T_g$ entre sa valeur à l'état sec et à l'état saturé en eau ($T_g = T_g^l$) suivant un mécanisme exponentiel paramétré par l'écart $T_g^0 - T_g^l$ et dépendant de la teneur en eau à partir de laquelle $T_g$ n'évolue plus, notée $C_{\mathrm{H_2O}}^l$ :

$$T_g = \left(T_g^0 - T_g^l\right) \cdot \exp\left(\frac{-C_{\mathrm{H_2O}} \operatorname{Ln}\left(T_g^0 - T_g^l\right)}{\tau \cdot C_{\mathrm{H_2O}}^l}\right) + T_g^l \tag{4.3}$$

$C_{\mathrm{H_2O}}^l$ est déterminée à partir du nombre de sites hydrophiles accessibles dans le réseau macromoléculaire et vaut 0.154 pour un taux de cristallinité de 35.6 %. $\tau$ est un coefficient ajustable du modèle, identifié à 0.875 pour un PA66. Enfin, l'équation de Kelly-Bueche suppose que le volume du liquide

dilué s'ajoute au volume libre du polymère. Elle s'exprime ainsi en fonction de la concentration volumique en eau, notée $\overline{C_{\mathrm{H_2O}}}$. Tout comme la loi d'Ellis-Karasz, cette équation peut se comprendre comme une loi des mélanges en $T_g$, pondérée par une grandeur physique :

$$T_g = \frac{\overline{C_{\mathrm{H_2O}}} \cdot \alpha^{\mathrm{eau}} \cdot T_g^{\mathrm{eau}} + (1 - \overline{C_{\mathrm{H_2O}}})\ \Delta\alpha \cdot T_g^0}{\overline{C_{\mathrm{H_2O}}} \cdot \alpha^{\mathrm{eau}} + (1 - \overline{C_{\mathrm{H_2O}}})\ \Delta\alpha} \tag{4.4}$$

$\alpha^{\mathrm{eau}}$ représente le coefficient de dilatation thermique de l'eau, et $\Delta\alpha$ est la variation du coefficient de dilatation thermique du polymère au passage de la transition vitreuse, en général supposée égale à $4.8\times10^{-4}$ K$^{-1}$, mais à ajuster pour chaque thermoplastique [183].

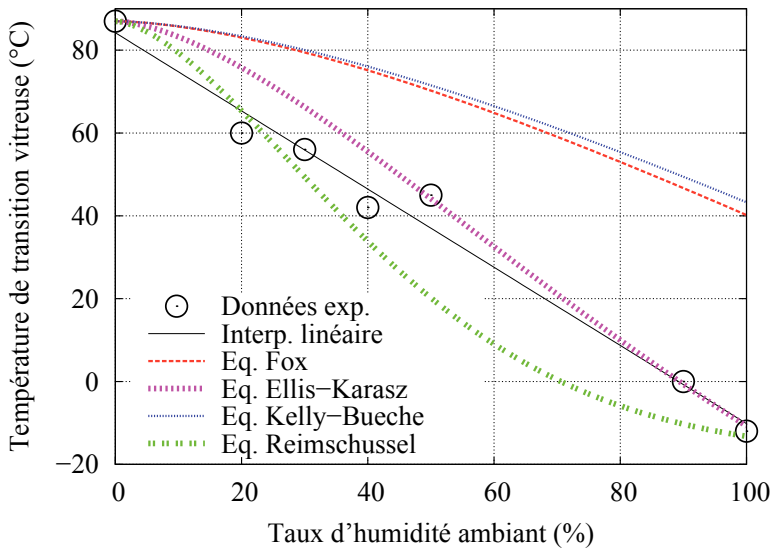



FIGURE 4.5 – Comparaison de différentes méthodes pour évaluer l'influence du taux d'humidité sur la température de transition vitreuse du PA66 non chargé. Les données expérimentales, fournies par DuPont ™, sont obtenues par des essais de DMA.

Comme nous le constatons sur la figure 4.5, aucune de ces équations ne permet de vraiment bien représenter l'évolution de $T_g$ en fonction de $\mathcal{H}$ pour le polyamide 66 [1]. L'équation de Fox est simple mais très imprécise, ce que Kettle [109] a également remarqué dans le cas du polyamide 6. L'équation de Kelly-Bueche peut donner de meilleurs résultats, mais à condition de déterminer précisément le paramètre $\Delta\alpha$ ; par ailleurs les fondements physiques de cette modélisation ne sont pas clairement identifiés [183]. Les modèles de Reimschuessel ou d'Ellis-Karasz sont plus précis, mais font intervenir des paramètres physiques ($\Delta c_p$, $C^l_{\mathrm{H_2O}}$) qu'il n'est pas simple d'identifier pour un grade quelconque de polyamide, auxquels il faut ajouter des coefficients ajustables ($\tau$, $f$). C'est la raison pour laquelle nous choisissons de privilégier une relation empirique très simple, résultat d'une interpolation linéaire :

$$T_g(\mathcal{H})\ [^\circ\mathrm{C}] = T_g^0 - \chi \cdot \mathcal{H}\ [\%] \tag{4.5}$$

1. Le passage de la teneur en eau au taux d'humidité à l'équilibre est fait selon la loi $C_{\mathrm{H_2O}} = a\ \mathcal{H}^b$ (voir le chapitre 2).

Le paramètre $\chi$ est proche de 1 pour le PA66[2]. Contrairement aux modèles précédents, cette relation n'est pas sous-tendue par une justification physico-chimique, mais elle présente l'avantage d'être précise, en plus d'être facilement utilisable dans le cadre industriel. Notamment, elle fait directement référence au taux d'humidité ambiant $\mathcal{H}$ à l'équilibre, et non pas à la concentration massique $w$ (plus difficile à mesurer), et est calibrée à partir de deux mesures expérimentales ($T_g$ à l'état sec et conditionné à $\mathcal{H}$=50 % par exemple). Nous utiliserons donc cette relation dans la suite de nos travaux.

### 4.2.2 Détermination expérimentale dans le cas du PA66-GF35

#### a Protocole expérimental

Pour le matériau de notre étude, il est nécessaire de caractériser la relation entre $T_g$ et $\mathcal{H}$. Nous avons donc mis au point un protocole d'essai pour mesurer expérimentalement la température de transition vitreuse à l'équilibre avec différents taux d'humidité. Classiquement, $T_g$ est déterminée à l'aide d'un balayage en température sur des essais de DMA (*Dynamic Mechanical Analysis*).

Un essai de DMA est l'application d'un signal sinusoïdal d'effort (ou de déplacement) de faible amplitude sur une éprouvette contrôlée en température, à la fréquence $f$. À l'échelle locale, il est possible d'exprimer la relation entre le signal des contraintes et celui des déformations par :

$$\boldsymbol{\sigma} = (E' + iE'')\boldsymbol{\varepsilon} \tag{4.6}$$

où $\boldsymbol{\sigma} = \sigma_0 e^{i(\omega t+\delta)}$ et $\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_0 e^{i\omega t}$ sont définis dans le plan complexe pour la pulsation $\omega = 2\pi f$. $E'$ est le module de stockage, $E''$ le module de perte (viscoélastique), tandis que le facteur de perte $\tan\delta = E'/E''$ est une mesure du déphasage entre les deux signaux, et permet d'évaluer la dissipation viscoélastique. Lors d'un balayage en température à fréquence imposée, on définit $T_g$ comme la température correspondant soit au point d'inflexion de la courbe $E' = E'(T)$, soit au pic de dissipation (i.e. de $\tan\delta$). Ces deux méthodes donnent en règle générale des valeurs de $T_g$ proches l'une de l'autre.

Dans le cas des thermoplastiques renforcés en fibres de verre, nous avons constaté une influence du type d'éprouvette sur la mesure de la température de transition vitreuse. Cela s'explique par le lien fort entre la microstructure (la distribution d'orientation des fibres) et les caractéristiques mécaniques. De façon à s'abstraire de cette difficulté supplémentaire, nous avons donc choisi de déterminer la relation $T_g = T_g(\mathcal{H})$ dans les mêmes conditions que pour les essais de comportement, c'est-à-dire à partir d'une sollicitation de traction sur les éprouvettes ISO527-2-1A. À partir d'éprouvettes conditionnées à différents taux d'humidité, nous avons réalisé des balayages en température à 1 Hz, dans l'enceinte climatique. Notons juste que contrairement aux essais classiques de DMA, effectués sur des éprouvettes de petite dimension, le volume utile de l'éprouvette ISO527-2-1A est assez important. C'est pourquoi nous avons respecté des paliers de stabilisation de 30 minutes pour chaque niveau de température, de façon à garantir un champ thermique homogène dans la section de l'éprouvette.

#### b Résultats et loi proposée

Nous avons testé des éprouvettes conditionnées à l'équilibre avec des taux d'humidité de 10, 20, 50, 65 et 75 %. La figure 4.6 présente le résultat de l'essai de DMA dans le cas $\mathcal{H}$=75 % : $T_g(75\ \%)$ est alors évaluée à 5 °C. La figure 4.7 récapitule l'évolution de $T_g$ en fonction de $\mathcal{H}$, et nous constatons que malgré la dispersion expérimentale, une loi linéaire (Eq. 4.5) est en accord avec les données. Une

2. Plus exactement, $\chi$ s'exprime en °C par % : il faut comprendre qu'une augmentation de 1 % du taux d'humidité ambiant abaisse d'environ 1 °C la température de transition vitreuse.

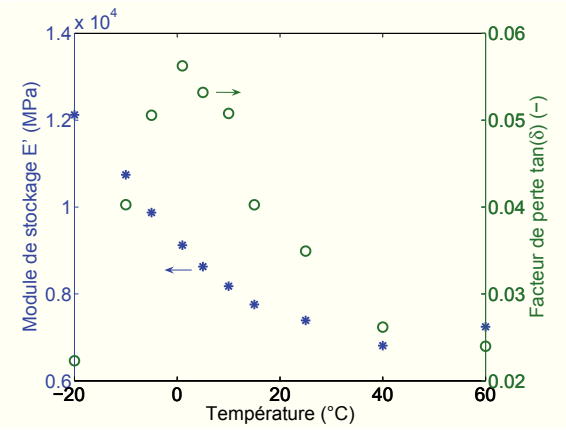



FIGURE 4.6 – Résultat d'un essai de DMA à $\mathcal{H}$=75 % sur ISO527-2-1A : évolution du module de stockage $E'$ et du facteur de perte $\tan\delta$ en fonction de la température.

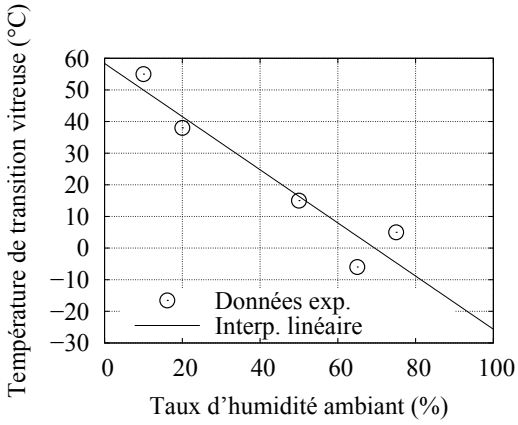



FIGURE 4.7 – Évolution de la température de transition vitreuse du PA66-GF35 de l'étude en fonction du taux d'humidité, et interpolation linéaire retenue.

régression linéaire donne la température de transition vitreuse à l'état sec $T_g^0$ = 58.4 ˚C et le coefficient $\chi$ = 0.84 ( ˚C /%).

## 4.3 Équivalence température-humidité

Nous avons montré que le taux d'humidité a une influence sur la température de transition vitreuse, qui joue elle-même un rôle important dans la réponse mécanique du comportement. Dans cette section, nous montrons qu'il est possible de traduire les effets de l'environnement hygrothermique au moyen d'un seul paramètre, l'écart à la température de transition vitreuse, qui pilote le comportement mécanique. Cette idée s'appuie notamment sur les travaux de Miri et al. [144] qui ont montré qu'une telle équivalence peut être mise en évidence expérimentalement au moyen d'essais de traction monotone sur des éprouvettes en polyamide 6.

### 4.3.1 Essais de DMA

Tout d'abord, il est possible d'illustrer l'équivalence température-humidité sur les caractéristiques viscoélastiques (court terme), à l'aide des essais de DMA. En effet, si on choisit de tracer l'évolution du module de stockage $E'$ en fonction de l'écart à la température de transition vitreuse, pour chacun des taux d'humidité testés, on constate une bonne superposition des courbes expérimentales, comme le montre la figure 4.8. En revanche, les évolutions du facteur de perte renvoient un moins bon accord : cela s'explique en partie par la mesure expérimentale du déphasage qui est plus délicate, en raison de la faible amplitude du signal d'effort imposé vis-à-vis de la gamme de la cellule d'effort de 100 kN.

En outre, pour ces sollicitations, le modèle de comportement proposé peut être assimilé à un simple modèle de Kelvin-Voigt d'ordre 1. Il est alors possible d'exprimer le module de stockage et le facteur de perte à partir des coefficients $E_e^0$, $E_{v2}$ et $\eta_2$ identifiés pour chaque condition hygrothermique. Une résolution analytique pour un signal de pulsation $\omega$ permet alors d'identifier $E'$ et $\tan\delta$

selon :

$$E' = \frac{(E_e^0 + E_{v2})E_e^0 E_{v2} + (\eta_2\omega)^2 E_e^0}{(E_e^0 + E_{v2})^2 + (\eta_2\omega)^2} \tag{4.7}$$

$$\tan\delta = \frac{\eta_2\omega(E_e^0)^2}{(E_e^0 + E_{v2})E_e^0 E_{v2} + (\eta_2\omega)^2 E_e^0} \tag{4.8}$$

Nous constatons sur la figure 4.8 une bonne correspondance entre les caractéristiques viscoélastiques issues du modèle de comportement (symboles) et les courbes expérimentales, particulièrement en ce qui concerne le module de stockage $E'$. Les écarts observés sur le facteur de perte s'expliquent par la difficulté à concilier les caractéristiques visqueuses sur de faibles niveaux de déformation avec celles identifiées sur des niveaux plus importants. Détrez [57] a déjà rencontré les mêmes difficultés pour exploiter directement les résultats d'essais de DMA dans le cadre d'un modèle phénoménologique, pour des thermoplastiques non renforcés.

Malgré cette réserve, ces premiers résultats nous confirment la bonne application du principe d'équivalence température-humidité en ce qui concerne les propriétés viscoélastiques.

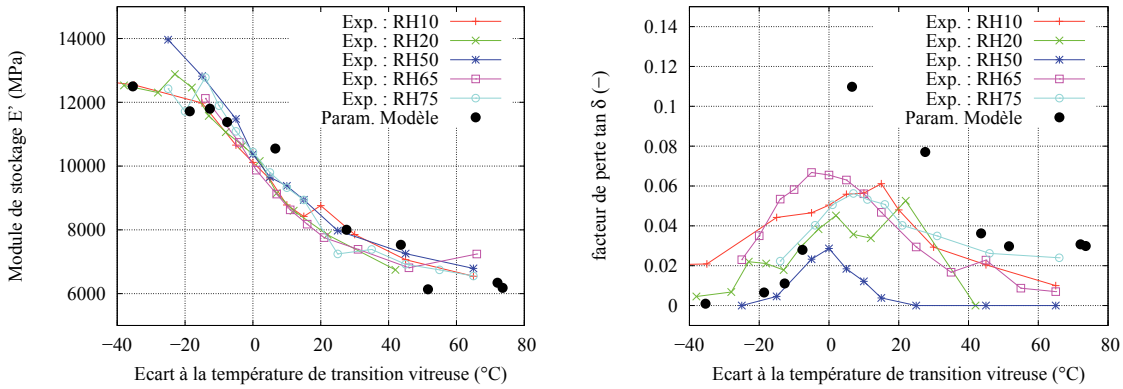



FIGURE 4.8 – Évolution du module de stockage $E'$ et du facteur de perte $\tan\delta$ en fonction de l'écart à la température de transition vitreuse $T - T_g$.

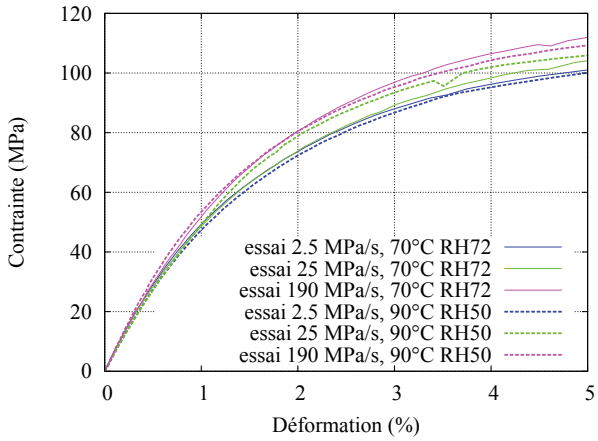
### 4.3.2 Essais de comportement

Parmi les différentes conditions hygrothermiques que nous avons testées lors de notre campagne de caractérisation du comportement cyclique, deux d'entre elles sont similaires du point de vue de l'écart à la température de transition vitreuse. En effet, les éprouvettes testées à $\mathcal{H}$=50 % et $T$=90 °C présentent un écart à la température de transition vitreuse de +74 °C, contre +72 °C pour celles testées à $\mathcal{H}$=72 % et $T$=70 °C [3].

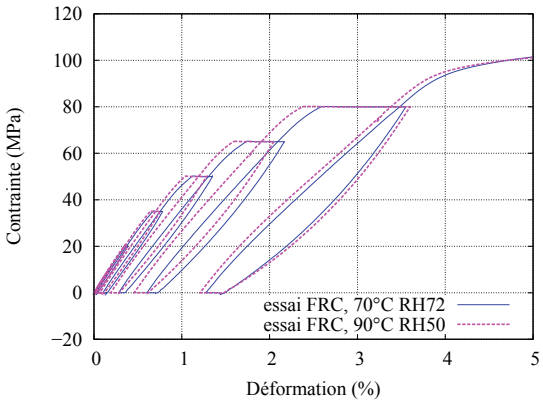
La figure 4.9 permet de démontrer que du point de vue de la réponse mécanique non linéaire, ces deux conditions sont bien équivalentes. Les courbes de traction monotone à différentes vitesses ainsi que l'essai FRC sont en effet quasiment superposés. En ce qui concerne les courbes de traction monotone, ce résultat est semblable à celui présenté par Miri et al. [144]. En outre, le résultat des deux essais FRC, qui mettent en jeu toutes les composantes physiques de la réponse mécanique, démontre que la superposition des courbes de traction monotone n'est pas simplement le résultat d'une

3. L'écart $T - T_g$ est calculé au moyen de la relation empirique 4.5 caractérisée en section 4.2.2.

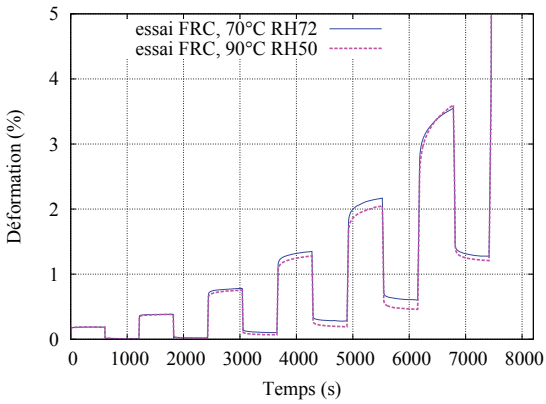
compensation entre mécanismes de déformation (visqueux ou plastiques par exemple) : nous montrons bien que les paliers de fluage/relaxation présentent la même cinétique, que la déformation résiduelle est activée selon les mêmes mécanismes, que la chute de raideur est parfaitement comparable dans les deux cas. Nous pouvons en conclure que l'équivalence température-humidité est validée en ce qui concerne les propriétés viscoélastiques long terme et viscoplastiques.




(a) Essais de traction mononone




(b) Essai FRC, courbe contrainte-déformation




(c) Essai FRC, réponse temporelle

FIGURE 4.9 – Mise en évidence expérimentale de l'équivalence température-humidité sur des essais de comportement complexes effectués à $T - T_g \sim +73$ °C.

## 4.4 Dépendance des paramètres matériaux à l'environnement

### 4.4.1 Application de l'équivalence température-humidité

Nous avons tracé sur la figure 4.10 les évolutions des paramètres du modèle de comportement en fonction de l'écart à la température de transition vitreuse $T - T_g$. Malgré une certaine dispersion, les évolutions des coefficients sont relativement régulières, ce qui confirme l'idée que l'influence de l'environnement hygrothermique peut effectivement être résumée au travers du seul paramètre $T - T_g(\mathcal{H})$. Nous constatons que le passage de la transition vitreuse induit une grande variabilité des

différents coefficients du modèle. Cette observation est pleinement justifiée par la grande influence de la phase amorphe sur la réponse mécanique.

Une analyse globale des tendances de l'évolution des paramètres permet de montrer que pour $T - T_g$ faible (faible température ou matériau sec), la réponse mécanique est surtout élasto-viscoplastique, et pourrait être décrite par un modèle EVP. Au voisinage de la température de transition vitreuse ($T - T_g \sim 0$), les caractéristiques viscoélastiques de la réponse mécanique sont très marquées, et l'adoucissement cyclique est activé. Lorsque $T - T_g$ devient grand, la réponse est essentiellement viscoplastique, le domaine apparent de viscoélasticité est très fortement réduit ($H$ est très faible) et on observe une chute importante des modules d'écrouissage, ce qui explique l'« aplatissement » de la réponse mécanique.

### 4.4.2 Discussion

Le principe d'équivalence température-humidité, que nous avons exposé et mis en évidence expérimentalement au cours de ce chapitre, permet tout d'abord d'améliorer notre compréhension de l'influence de l'environnement sur les mécanismes de déformation. Ainsi, température et taux d'humidité jouent *in fine* le même rôle puisqu'une variation de l'un ou l'autre se traduit par une modification du paramètre de contrôle $T - T_g$. À l'échelle microstructurale, cette équivalence est justifiée par la mobilité des chaînes du réseau macromoléculaire, activée thermiquement ou facilitée par l'augmentation des distances inter-moléculaires. Les résultats de ce chapitre sont fondés sur une campagne expérimentale qui n'a, à notre connaissance, pas d'équivalent dans la littérature consacrée au comportement des thermoplastiques, tant par la diversité des cas de chargement étudiés que par l'ampleur de la gamme $T - \mathcal{H}$ explorée.

L'équivalence température-humidité nous permet au final de comprendre les évolutions des paramètres du modèle de comportement phénoménologique sur une gamme très large de sollicitations (de -40 à +80 °C autour de la transition vitreuse). Nous répondons ainsi aux exigences de caractérisation formulées lors du chapitre 2, et mettons en évidence la nécessité d'intégrer toute la richesse de la loi de comportement proposée pour les applications sur le circuit d'admission d'air.

Du point de vue industriel, une telle équivalence est précieuse pour faciliter la caractérisation de la réponse mécanique cyclique. La température et le taux d'humidité ont tous les deux une influence fondamentale sur la réponse mécanique, ce qui nécessite *a priori* une campagne expérimentale de caractérisation du comportement cyclique non linéaire très importante, comme celle que nous avons présentée. Néanmoins, à l'avenir, cette campagne pourra être grandement allégée grâce au principe d'équivalence. Une étape préliminaire consistera en la détermination de la relation empirique $T_g = T_g(\mathcal{H})$, travail aisé puisque nous avons montré qu'une relation linéaire est satisfaisante.

Les résultats de ce chapitre permettent ainsi une réelle avancée en vue d'une application industrielle des polyamides renforcés dans des conditions hygrothermiques complexes. La sensibilité du comportement à l'environnement, résumée à un seul paramètre, ne différencie pas les composites à matrice polyamide des matériaux « concurrents » (autres matrices thermoplastiques, voire matériaux métalliques), dont la sensibilité à la température doit toujours être prise en compte pour une conception fiable.

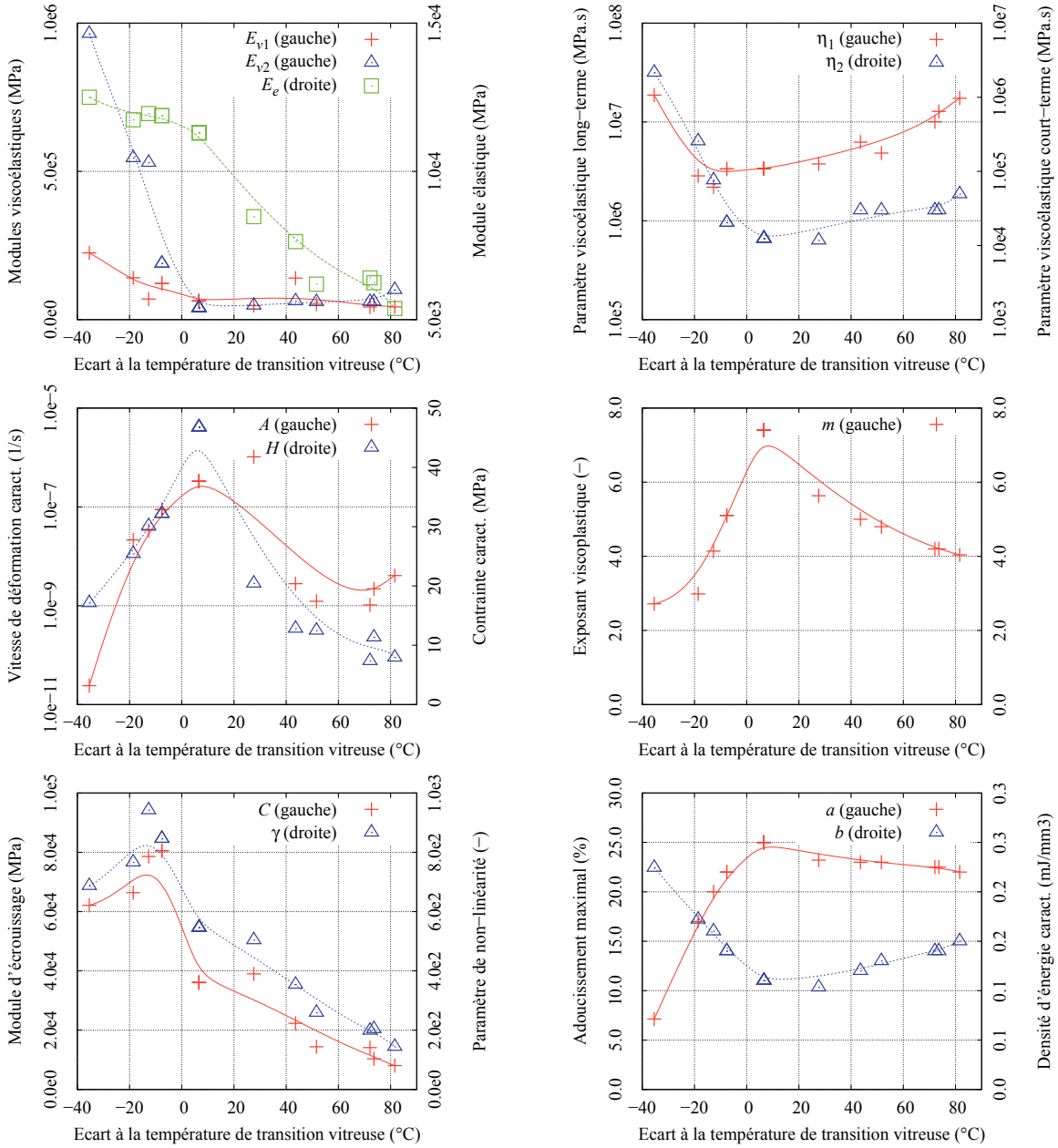



FIGURE 4.10 – Variation des paramètres du modèle en fonction de l'écart à la transition vitreuse. Les symboles représentent les paramètres identifiés, auxquels on a superposé des tendances sous forme de courbes de Bézier.

# Chapitre 5

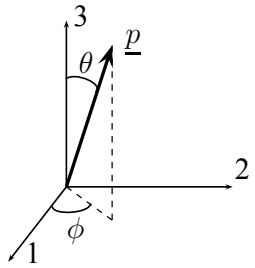
# Distribution d'orientation des fibres et comportement

## Sommaire


**5.1 Distribution et tenseurs d'orientation . . . . . 106**
5.1.1 Caractérisation de l'orientation des fibres . . . . . 106
5.1.2 Modèle d'évolution de l'orientation . . . . . 108
5.1.3 Équations de fermeture . . . . . 108
**5.2 Influence de la microstructure sur les propriétés élastiques . . . . . 111**
5.2.1 Choix d'une méthode d'homogénéisation . . . . . 111
5.2.2 Développement dans le cas industriel . . . . . 114
**5.3 Influence de la microstructure sur les propriétés viscoplastiques . . . . . 115**
5.3.1 État de l'art succinct . . . . . 115
5.3.2 Modélisation orthotrope de la contrainte viscoplastique équivalente . . . . . 117
**5.4 Validation de la prise en compte de la microstructure sur la réponse mécanique 119**
5.4.1 Propriétés élastiques de la matrice . . . . . 120
5.4.2 Microstructures étudiées . . . . . 120
5.4.3 Résultats et discussion . . . . . 121


Dans ce chapitre, nous nous intéressons au lien entre la microstructure et les caractéristiques de la réponse mécanique. En effet, l'étude du comportement mécanique a été menée à partir d'un seul type d'éprouvette (ISO527-2-1A), ce qui est insuffisant pour pouvoir décrire la réponse mécanique d'une pièce plus complexe, dont la distribution d'orientation est anisotrope et hétérogène. Dans la suite de ces travaux, le terme *microstructure* désignera uniquement la distribution d'orientation des fibres. Ainsi, les éventuelles hétérogénéités de la matrice (gradients de cristallinité, structure sphérolitique) seront négligées devant le fort contraste de propriétés mécaniques entre le polyamide 66 et les fibres de verre. De même, la fraction volumique de fibres sera considérée comme homogène sur la structure.

Dans un premier temps, nous précisons le lien entre le procédé d'injection et la distribution d'orientation, et nous introduisons la notion d'équation de fermeture à partir des équations rhéologiques. Nous exposons ensuite la façon dont nous avons choisi de tenir compte de la microstructure locale en ce qui concerne les propriétés élastiques et viscoplastiques. Notre approche, qui s'inscrit toujours dans un cadre phénoménologique, est finalement validée à partir d'essais sur des microstructures simples.




$$\underline{p} = \begin{Bmatrix} \sin\theta \cdot \cos\phi \\ \sin\theta \cdot \sin\phi \\ \cos\theta \end{Bmatrix}_{(\underline{e}_i)}$$

FIGURE 5.1 – Définition du vecteur d'orientation d'une fibre dans le repère global $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$.

## 5.1 Distribution et tenseurs d'orientation

### 5.1.1 Caractérisation de l'orientation des fibres

Une fibre de verre est caractérisée dans le repère global lié à un échantillon par la donnée de deux angles $\theta$ et $\phi$, qui permettent de définir un vecteur unitaire d'orientation $\underline{p}$, comme présenté sur la figure 5.1. L'axe $\underline{e}_1$ est généralement défini comme axe d'écoulement de la matière.

Dans les pièces injectées, en raison du grand nombre de fibres, on utilise la notion de distribution d'orientation $\psi$, qui permet d'analyser la probabilité de trouver une fibre dans un angle solide $\omega$ donné [1]. $\psi$ est une fonction paire : $\psi(\underline{p}) = \psi(-\underline{p})$, et normée : $\int_\Omega \psi(\underline{p})\, \mathrm{d}\omega = 1$, où $\Omega$ désigne la sphère unité.

#### a Tenseurs d'orientation

Les moments statistiques d'ordre pair de $\psi$ sont appelés tenseurs d'orientation [1]. On définit ainsi $\underline{\underline{a}}^\psi$ le tenseur d'orientation d'ordre 2 et $\mathbb{A}^\psi$ le tenseur d'orientation d'ordre 4 par :

$$\underline{\underline{a}}^\psi = \int_\Omega p_i p_j\, \psi(\underline{p})\, \mathrm{d}\omega \quad \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j, \quad i,j \in [1,\ 3] \tag{5.1}$$

$$\mathbb{A}^\psi = \int_\Omega p_i p_j p_k p_l\, \psi(\underline{p})\, \mathrm{d}\omega \quad \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \otimes \underline{e}_k \otimes \underline{e}_l, \quad i,j,k,l \in [1,\ 3] \tag{5.2}$$

$\underline{\underline{a}}^\psi$ est un tenseur d'ordre 2 symétrique et $\mathbb{A}^\psi$ un tenseur d'ordre 4 complètement symétrique [2]. La normalité de $\psi$ permet de démontrer que $\mathrm{Tr}\left(\underline{\underline{a}}^\psi\right) = 1$ et que l'information de $\underline{\underline{a}}^\psi$ est contenue dans $\mathbb{A}^\psi$ : $A^\psi_{ijkk} = a^\psi_{ij}$. En conséquence, $\underline{\underline{a}}^\psi$ et $\mathbb{A}^\psi$ possèdent respectivement 5 et 13 composantes indépendantes.

La connaissance de la distribution d'orientation complète $\psi$ équivaut à la connaissance de tous ses moments statistiques, mais les moments d'ordre 2 et 4 contiennent généralement suffisamment d'information. De façon à expliciter ce point, nous introduisons les quantités tensorielles suivantes [1] :

$$\underline{\underline{b}} = \underline{\underline{a}}^\psi - \frac{1}{3}\underline{\underline{1}} \equiv \underline{\underline{\mathrm{dev}}}\left(\underline{\underline{a}}^\psi\right) \tag{5.3}$$

$$\mathbb{B} = \mathbb{A}^\psi - \frac{1}{7}\left(\underline{\underline{1}} \otimes \underline{\underline{a}}^\psi + \underline{\underline{a}}^\psi \otimes \underline{\underline{1}} + \mathbb{D}(\underline{\underline{a}}^\psi, \underline{\underline{1}})\right) + \frac{1}{35}\left(2\mathbb{I} + 3\mathbb{J}\right) \tag{5.4}$$

$\mathbb{D}$ est un opérateur sur les tenseurs d'ordre 2 défini par : $D_{ijkl}(\underline{\underline{s}}, \underline{\underline{t}}) = s_{ik}t_{jl} + s_{il}t_{jk} + s_{jl}t_{ik} + s_{jk}t_{il}$ ; $\mathbb{B}$ et $\underline{\underline{b}}$ s'annulent pour une distribution isotrope, et $\mathbb{B}$ peut ainsi s'interpréter comme une généralisation du

1. La parité de $\psi$ a pour conséquence la nullité des moments d'ordre impair.
2. $\mathbb{A}^\psi$ respecte les symétries mineures ($A^\psi_{ijkl} = A^\psi_{ijlk}$) et majeures ($A^\psi_{ijkl} = A^\psi_{klij}$), et vérifie en outre $A^\psi_{ijkl} = A^\psi_{ikjl}$.

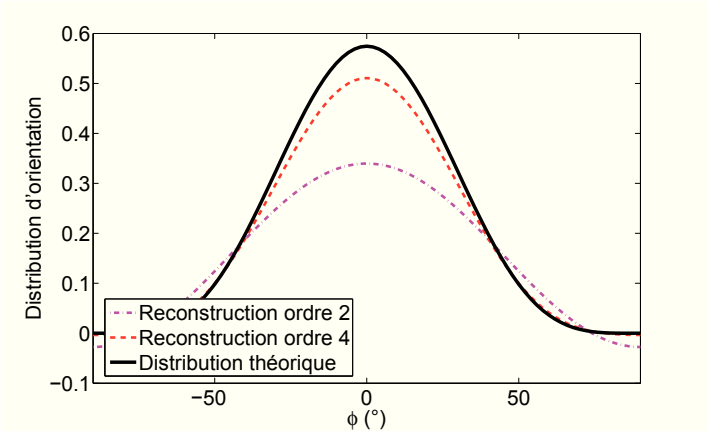



FIGURE 5.2 – Distribution d'orientation analytique 3D, projetée sur le plan $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$, et reconstructions aux ordres 2 et 4. On a choisi pour cet exemple $m = 10$ (cas d'une orientation où peu de fibres sont hors-plan : $\theta \sim \pi/2$) et $n = 4$ (alignement modéré selon la direction $\underline{e}_1$).

déviateur à l'ordre 4. Nous définissons également les harmoniques sphériques de la variables aléatoire $\underline{p}$ :

$$\underline{\underline{f}} = \underline{p} \otimes \underline{p} - \frac{1}{3}\underline{\underline{1}} \tag{5.5}$$

$$\mathbb{F} = \underline{p} \otimes \underline{p} \otimes \underline{p} \otimes \underline{p} - \frac{1}{7}\left(\underline{\underline{1}} \otimes \underline{p} \otimes \underline{p} + \underline{p} \otimes \underline{p} \otimes \underline{\underline{1}} + \mathbb{D}(\underline{p} \otimes \underline{p}, \underline{\underline{1}})\right) + \frac{1}{35}\left(2\mathbb{I} + 3\mathbb{J}\right) \tag{5.6}$$

Des expressions similaires peuvent être formulées aux ordres pairs supérieurs. On aboutit alors à un développement de la distribution d'orientation selon ses moments pairs sous la forme :

$$\psi(\underline{p}) = \frac{1}{4\pi} + \frac{15}{8\pi}\underline{\underline{b}} : \underline{\underline{f}} + \frac{315}{32\pi}\mathbb{B} :: \mathbb{F} + \ldots \tag{5.7}$$

Le développement tronqué aux ordres 2 et 4 constitue une reconstruction approchée de $\psi$, que l'on illustre sur la figure 5.2 dans le cas d'une distribution analytique. On utilise la formulation suggérée par Advani et Tucker III [1][3] $\psi(\theta, \phi) = K \sin^m\theta \cos^n\phi$ . Une telle distribution décrit le cas isotrope 3D quand $m$ et $n$ sont nuls, le cas isotrope 2D quand $m \to +\infty$ et tend vers le cas unidirectionnel (UD) où les fibres sont toutes alignées selon $\underline{e}_1$ quand $m$ et $n$ sont grands. $K$ est une constante permettant d'assurer la condition de normalisation sur $\psi$.

On montre qu'une reconstruction à l'ordre 4 constitue en règle générale une bonne approximation de $\psi$.

### b Repère matériel local

On définit les trois vecteurs propres $\underline{u}_i$ du tenseur d'orientation $\underline{\underline{a}}^{\psi}$. Ils sont respectivement associés aux trois valeurs propres $a_i$, que l'on choisit ordonnées : $a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3$, avec $a_3 = 1 - a_1 - a_2$. Le triplet $(\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3)$ définit une base orthonormale, que l'on appellera par la suite repère matériel local.

3. L'intérêt d'une telle distribution réside dans la possibilité de calculer analytiquement les tenseurs d'orientation et des différentes intégrales de façon analytique à l'aide des intégrales de Wallis $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n\phi \, \mathrm{d}\phi$.

### 5.1.2 Modèle d'évolution de l'orientation

La prédiction des orientations des fibres courtes lors du procédé d'injection résulte des travaux de Folgar et Tucker III [72]. Les auteurs se sont intéressés au mouvement d'une fibre seule, d'orientation $\underline{p}$, dans un fluide newtonien de vorticité $\underline{\underline{\omega}}$, de taux de déformation $\underline{\underline{\dot{\gamma}}}$ et soumise aux interactions avec une population de fibres de distribution d'orientation locale $\psi$. Ils ont proposé l'équation d'évolution suivante :

$$\frac{d\underline{p}}{dt} = -\frac{1}{2}\underline{\underline{\omega}} \cdot \underline{p} + \frac{1}{2}\lambda\left(\underline{\underline{\dot{\gamma}}} \cdot \underline{p} - \underline{\underline{\dot{\gamma}}} : (\underline{p} \otimes \underline{p} \otimes \underline{p})\right) - \frac{C_I \dot{\gamma}}{\psi}\frac{\partial \psi}{\partial \underline{p}} \tag{5.8}$$

Cette équation fait intervenir le coefficient $\lambda = \frac{r^2-1}{r^2+1}$ qui dépend directement du rapport d'aspect des fibres $r$, et $C_I$ qui mesure de façon phénoménologique l'intensité des interactions entre fibres. Si ce coefficient est nul, on retrouve l'équation proposée initialement par Jeffery [100], dont le modèle de Folgar et Tucker est une extension. $\dot{\gamma}$ est la norme quadratique de $\underline{\underline{\dot{\gamma}}}$. Dans la littérature, on note parfois $D_r = C_I \dot{\gamma}$ la diffusivité rotatoire.

Cette équation peut être modifiée de façon à reconstruire l'équation gouvernant l'évolution de la distribution d'orientation des fibres $\psi$ [1]. Or, un tel problème est numériquement très lourd, et supppose de stocker énormément d'information. C'est la raison pour laquelle la plupart des codes de calcul d'injection (tels MOLDFLOW® [4]) résolvent plutôt l'équation d'évolution des tenseurs d'orientation, qui condensent l'information contenue dans la distribution d'orientation. Aux ordres 2 et 4, ces équations s'expriment :

$$\frac{d\underline{\underline{a}}^{\psi}}{dt} = -\frac{1}{2}\left(\underline{\underline{\omega}} \cdot \underline{\underline{a}}^{\psi} - \underline{\underline{a}}^{\psi} \cdot \underline{\underline{\omega}}\right) + \frac{1}{2}\lambda\left(\underline{\underline{\dot{\gamma}}} \cdot \underline{\underline{a}}^{\psi} + \underline{\underline{a}}^{\psi} \cdot \underline{\underline{\dot{\gamma}}} - 2\mathbb{A}^{\psi} : \underline{\underline{\dot{\gamma}}}\right) + 2D_r\left(\underline{\underline{1}} - 3\underline{\underline{a}}^{\psi}\right) \tag{5.9}$$

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbb{A}^{\psi}}{dt} &= -\left(\underline{\underline{\omega}} \cdot \mathbb{A}^{\psi} - \mathbb{A}^{\psi} \cdot \underline{\underline{\omega}}\right) + \lambda\left(\underline{\underline{\dot{\gamma}}} \cdot \mathbb{A}^{\psi} + \mathbb{A}^{\psi} \cdot \underline{\underline{\dot{\gamma}}} - 2\mathcal{A}_6^{\psi} : \underline{\underline{\dot{\gamma}}}\right) \\ &\quad +2D_r\left(-10\mathbb{A}^{\psi} + \underline{\underline{1}} \otimes \underline{\underline{a}}^{\psi} + \underline{\underline{a}}^{\psi} \otimes \underline{\underline{1}} + \mathbb{D}\left(\underline{\underline{a}}^{\psi}, \underline{\underline{1}}\right)\right)\end{aligned} \tag{5.10}$$

On a noté $\mathcal{A}_6^{\psi}$ le tenseur d'orientation d'ordre 6. La résolution des équations 5.9 ou 5.10 est bien plus rapide que pour l'équation 5.8 [45] : elles peuvent donc être appliquées à la détermination de l'orientation des fibres lors de l'injection de pièces industrielles. On pourra se référer aux travaux de Bay et Tucker III [16] pour connaître les détails de mise en œuvre d'une telle simulation numérique, avec notamment les couplages thermiques et le traitement des conditions aux limites.

### 5.1.3 Équations de fermeture

On remarque que l'équation 5.9, pour être soluble, nécessite la connaissance du tenseur d'orientation d'ordre 4. De même, l'équation 5.10 fait intervenir le tenseur d'orientation d'ordre 6, etc. Il faut ainsi *fermer* le problème au sens mathématique, et proposer une relation supplémentaire pour lier $\mathbb{A}^{\psi}$ à $\underline{\underline{a}}^{\psi}$, ou $\mathcal{A}_6^{\psi}$ à $\mathbb{A}^{\psi}$. Une telle relation est appelée *équation de fermeture*.

4. Notons que MOLDFLOW®, dans le cadre de simulation « mid-plane » (éléments 2D avec plusieurs points d'intégration sur l'épaisseur), enrichit le modèle en introduisant un coefficient supplémentaire $D_z$, dit d'interaction entre les moments dans l'épaisseur. Ce paramètre vaut 1 dans le modèle de Folgar-Tucker de base, mais lui attribuer des valeurs inférieures permet d'augmenter l'épaisseur prédite de la zone de cœur. La détermination du couple de valeurs $(C_I,\ D_z)$ reste néanmoins assez empirique et demande de pouvoir confronter les prédictions numériques aux mesures expérimentales.

Dans la pratique, les codes de calculs d'injection se limitent à la résolution de l'équation portant sur le tenseur d'ordre 2 (Eq. 5.9), plus simple. C'est la raison pour laquelle nous nous restreignons à ce cas – tout comme la grande majorité des articles de la littérature abordant cette problématique.

### a Équations de fermeture classiques

L'équation de fermeture linéaire, proposée par Hand [82], est une estimation de $\mathbb{A}^{\psi}$ selon :

$$\mathbb{A}^{L} = \frac{1}{7}\left(\underline{\underline{1}} \otimes \underline{\underline{a}}^{\psi} + \underline{\underline{a}}^{\psi} \otimes \underline{\underline{1}} + \mathbb{D}(\underline{\underline{a}}^{\psi}, \underline{\underline{1}})\right) - \frac{1}{35}\left(2\mathbb{I} + 3\mathbb{J}\right) \tag{5.11}$$

Cette approximation est exacte dans le cas d'une distribution isotrope. Remarquons que l'écart entre $\mathbb{A}^{\psi}$ et $\mathbb{A}^{L}$ est le tenseur $\mathbb{B}$. Une seconde équation de fermeture, dite quadratique [62], s'écrit :

$$\mathbb{A}^{Q} = \underline{\underline{a}}^{\psi} \otimes \underline{\underline{a}}^{\psi} \tag{5.12}$$

Elle est exacte pour une distribution unidirectionnelle. Elle respecte les symétries mineures et majeures mais n'est pas complètement symétrique, contrairement au tenseur $\mathbb{A}^{\psi}$ : $A^{Q}_{ijkl} \neq A^{Q}_{ikjl}$. Certains auteurs rejettent ainsi d'office la formulation quadratique (et donc également les formulations hybrides, voir ci-après), puisqu'elle ne permet pas de construire une approximation physiquement acceptable du tenseur d'orientation d'ordre 4 [99].

Advani et Tucker III [1] ont proposé une combinaison de ces deux équations, de façon à former une expression exacte dans les deux cas isotrope et UD. Cette équation de fermeture est dite hybride (de type A), et est formulée par pondération entre les équations linéaire et quadratique :

$$\mathbb{A}^{H_A} = (1 - f_A)\,\mathbb{A}^{L} + f_A\,\mathbb{A}^{Q} \tag{5.13}$$

La fonction $f_A$ est construite de façon à valoir 1 dans le cas UD, et 0 dans le cas isotrope. Advani et Tucker III [1] ont ainsi proposé l'expression $f_A = \frac{3}{2}\underline{\underline{a}}^{\psi} : \underline{\underline{a}}^{\psi} - \frac{1}{2}$. Ces mêmes auteurs ont proposé par la suite une autre fonction, $f_B = 1 - 27 \det \underline{\underline{a}}^{\psi}$, ce qui amène à une formulation dite hybride de type B.

### b Équations de fermeture orthotropes

Plus récemment, Cintra et Tucker III [45] se sont intéressés à des approximations orthotropes du tenseur d'orientation d'ordre 4. Le principe de ces approximations est de se placer dans la base propre $(\underline{u}_i)$ (voir la figure 5.3) pour construire un tenseur d'ordre 4 sous la forme (en notations de Voigt) :

$$\mathbb{A}^{\mathrm{OR}} = \begin{bmatrix} \overline{A}_{1111} & \overline{A}_{1122} & \overline{A}_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ \overline{A}_{2211} & \overline{A}_{2222} & \overline{A}_{2233} & 0 & 0 & 0 \\ \overline{A}_{3311} & \overline{A}_{3322} & \overline{A}_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \overline{A}_{1212} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \overline{A}_{1313} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \overline{A}_{2323} \end{bmatrix}_{(\underline{u}_i)} \tag{5.14}$$

La barre supérieure indique que les coefficients sont exprimés dans le repère matériel local. Les propriétés de symétrie d'un tenseur d'orientation permettent de montrer que déterminer $\mathbb{A}^{\mathrm{OR}}$ équivaut à connaître les trois coefficients $\overline{A}_{iiii}$. Ainsi, les équations de fermetures orthotropes consistent en la construction de trois fonctions $\overline{A}_{iiii} = \overline{A}_{iiii}(a_1, a_2)$. Il reste ensuite à utiliser les opérations de changement de base pour exprimer le tenseur $\mathbb{A}^{OR}$ dans la base canonique $\{\underline{e}_i\}_{i=1\ldots3}$ :

$$\mathbb{A}^{\mathrm{OR}} = A^{\mathrm{OR}}_{ijkl} \cdot \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \otimes \underline{e}_k \otimes \underline{e}_l \quad \text{avec} \quad A^{\mathrm{OR}}_{ijkl} = \overline{A}_{mnop} \cdot u^m_i u^n_j u^o_k u^p_l \tag{5.15}$$

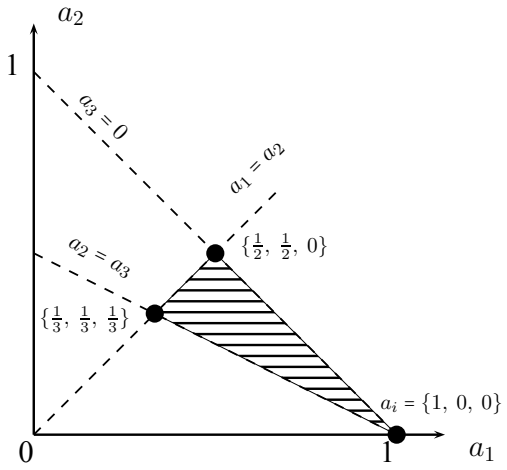



FIGURE 5.3 – Visualisation du domaine (hachuré) pour l'interpolation des tenseurs d'orientation d'ordre 4 à partir des valeurs propres $a_i$ du tenseur d'orientation d'ordre 2.

### Équation de fermeture souple

L'équation de fermeture orthotrope souple (ORS) est la façon la plus simple de construire ces fonctions, par interpolation linéaire entre les trois états d'orientation UD, isotrope et isotrope transverse. Si l'état UD est le seul possible correspondant au cas où $a_i = \{1,\ 0,\ 0\}$, les états isotrope transverse et isotrope sont les cas les plus souples associés à des tenseurs d'ordre 2 de valeurs propres $a_i = \{\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 0\}$ et $a_i = \{\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{3}\}$. On connaît analytiquement les tenseurs $\mathbb{A}^{\psi}$ associés à ces états particuliers. Pour un tenseur d'ordre 2 quelconque, un tenseur d'ordre 4 orthotrope est alors interpolé selon :

$$\begin{aligned}
A^{\text{ORS}}_{1111} &= -0.15 + 1.15a_1 - 0.10a_2 \\
A^{\text{ORS}}_{2222} &= -0.15 + 0.15a_1 + 0.90a_2 \\
A^{\text{ORS}}_{3333} &= 0.60 - 0.60a_1 - 0.60a_2.
\end{aligned}$$

### Équation de fermeture ajustée

On peut également construire une interpolation quadratique plus précise, fondée sur le sexuplet $\{1,\ a_1,\ a_1^2,\ a_2,\ a_2^2,\ a_1a_2\}$, pour déterminer les trois coefficients $\overline{A}_{iiii}$. De façon à enrichir la base d'interpolation, Cintra et Tucker III [45] ont procédé à la résolution analytique de l'équation d'évolution de Folgar-Tucker (Eq. 5.8 page 108) pour des valeurs particulières de $\lambda$ et $C_I$, et pour divers écoulements élémentaires (cisaillement, élongation ...). Dans le cas des thermoplastiques chargés en fibres de verre courtes, les auteurs proposent de choisir $\lambda = 1$ et $C_I = 0.01$, et déterminent ainsi les 18 coefficients nécessaires à l'interpolation orthotrope ajustée (ORF). Notons que Chung et Kwon [44] ont agrandi la base d'essais pour proposer de nouveaux coefficients d'interpolation, permettant une plus grande précision aux faibles valeurs de $C_I$ (de $10^{-3}$ à $10^{-4}$). L'équation de fermeture est alors appelée ORW. Il est également possible d'envisager une interpolation cubique, notée ORW3, avec 30 coefficients d'interpolation.

#### c Discussion

Il existe d'autres équations de fermeture dans la littérature, notamment des équations portant sur le tenseur d'orientation d'ordre 6, qui permettent de surmonter la principale difficulté associée aux équations de fermeture orthotropes qui négligent les termes de couplage liés au cisaillement [99]. Citons également Doghri et Tinel [61] qui proposent une formulation permettant de décrire la transition entre les états d'orientation UD, aléatoire dans le plan et aléatoire 3D (isotrope) en s'appuyant sur les meilleures équations de fermeture pour chacun des cas. Nous avons cependant résumé ici les approches les plus courantes.

Les différentes équations de fermeture sont évaluées en calculant les résultats fournis par l'équation approchée 5.9, puis en les comparant aux résultats de l'équation exacte 5.8, dans le cas d'écoulements simples, solubles analytiquement. Le choix de la meilleure équation de fermeture pour le problème rhéologique est hors du cadre de ces travaux de thèse [5] ; néanmoins, nous verrons qu'une équation de fermeture peut être nécessaire pour la détermination de certaines propriétés mécaniques. Les critères de choix de cette seconde équation de fermeture sont alors différents, et seront présentés lors de la section suivante.

## 5.2 Influence de la microstructure sur les propriétés élastiques

Dans cette section, nous nous intéressons à l'influence de la microstructure sur les propriétés élastiques, c'est-à-dire à la construction du tenseur d'élasticité $\mathbb{C}^e$ en fonction de la distribution locale d'orientation des fibres [6]. Dans un premier temps, nous déterminons quelle est la meilleure méthode, parmi celles proposées dans la littérature, pour estimer les propriétés élastiques d'un composite renforcé en fibres de verre courtes. Ce choix est fait à partir de volumes élémentaires représentatifs (VER) dont la microstructure est connue exactement, et pour lequel les modules élastiques peuvent être calculés par la méthode des éléments finis. Dans un second temps, nous nous intéressons au cas où l'on ne connaît la microstructure que via son tenseur d'orientation d'ordre 2 – ce qui corrrespond au cadre pratique industriel, où l'on dispose du champ tensoriel $\underline{\underline{a}}^{\psi}$ calculé par un logiciel de simulation d'injection. Nous montrons alors la nécessité d'une équation de fermeture pour résoudre le problème mécanique, et nous discutons des performances des différentes équations présentées dans la section 5.1.3.

### 5.2.1 Choix d'une méthode d'homogénéisation

Nous travaillons sur quatre volumes élémentaires représentatifs ; la distribution d'orientation des fibres de chacun de ces VER est générée à l'aide du logiciel DIGIMAT®. Ces VER sont numérotés de 1 à 4, et correspondent tous à des distributions quasiment planaires, ce qui est représentatif de la plupart des applications indutrielles. Les tenseurs d'orientation d'ordre 2 associés à chacune de ces microstructures valent, dans la base canonique $(\underline{e}_i)$ :

$$\underline{\underline{a}}_1^{\psi} = \begin{bmatrix} 0.28 & -0.07 & 0. \\ -0.07 & 0.72 & 0. \\ 0. & 0. & 0. \end{bmatrix}, \quad \underline{\underline{a}}_2^{\psi} = \begin{bmatrix} 0.76 & 0.07 & 0.01 \\ 0.07 & 0.18 & -0.01 \\ 0.01 & -0.01 & 0.06 \end{bmatrix}, \quad \underline{\underline{a}}_3^{\psi} = \begin{bmatrix} 0.93 & 0.01 & 0.05 \\ 0.01 & 0.03 & 0. \\ 0.05 & 0. & 0.05 \end{bmatrix}, \quad \underline{\underline{a}}_4^{\psi} = \begin{bmatrix} 0.99 & 0. & -0.01 \\ 0. & 0. & 0. \\ -0.01 & 0. & 0.01 \end{bmatrix}.$$

5. Les codes de calculs pour la simulation du procédé d'injection utilisent en règle générale des équations de fermeture orthotropes, avec des bases d'interpolation enrichies qui sont gardées confidentielles.

6. Plus précisément, si nous nous référons aux notations introduites lors du chapitre 3, $\mathbb{C}^e$ désigne le tenseur d'élasticité non adouci, qui s'écrit $\mathbb{C}^e(\beta = 0)$ en toute rigueur.

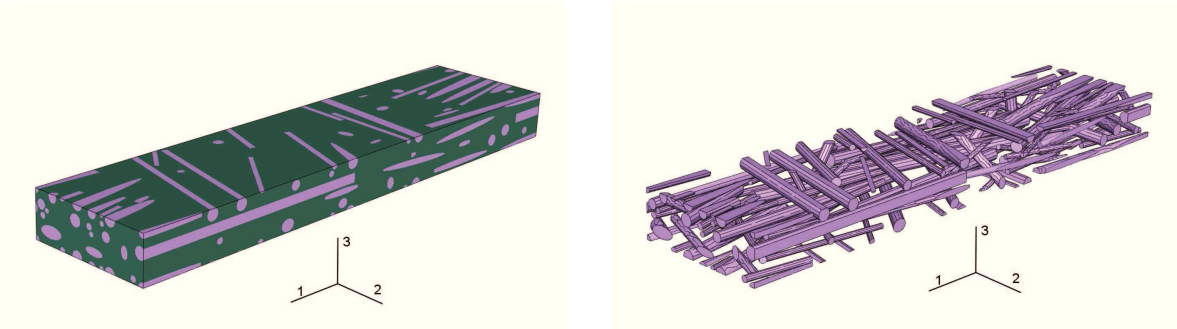



FIGURE 5.4 – Visualisation du VER correspondant à la microstructure 2 (modérément orientée suivant $\underline{e}_1$) : ensemble fibres et matrice (gauche) et fibres seules (droite). Maillage réalisé avec 644851 éléments tétraédriques quadratiques et 907487 nœuds.

Les quatre microstructures décrivent donc des états de plus en plus orientés selon la direction $\underline{e}_1$. De façon à illustrer notre propos, le VER correpondant à la microstructure 2 est présenté à titre d'exemple sur la figure 5.4.

### a Méthode directe

La méthode directe est une homogénéisation réalisée sur la phase matrice et $N$ familles de fibres, classées selon leur orientation, de fraction volumique $f_r$ avec $\sum_{r=1}^{N} f_r = f$ où $f$ est la fraction volumique totale de fibres. En utilisant le fait que toutes les fibres ont des propriétés identiques, et que fibres et matrice ont un comportement isotrope (leurs tenseurs de rigidité respectifs sont notés $\mathbb{C}^f$ et $\mathbb{C}^m$), on montre que le tenseur de rigidité effectif peut s'exprimer selon [20] :

$$\tilde{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^m + f\left\langle\left(\mathbb{C}^f - \mathbb{C}^m\right) : \mathbb{A}_f^{\mathrm{Esh}}\right\rangle : \left[(1-f)\mathbb{I} + f\left\langle\mathbb{A}_f^{\mathrm{Esh}}\right\rangle\right]^{-1} \tag{5.16}$$

où l'on rappelle que $\mathbb{A}_f^{\mathrm{Esh}}$ est le tenseur de localisation dans les fibres associé au modèle haute-dilution (voir Eq. 1.4) ; $\langle\cdot\rangle$ est ici l'opérateur de moyenne sur les orientations. Remarquons que nous présentons le cas d'une méthode directe avec un schéma de Mori-Tanaka, il aurait été possible d'utiliser un autre schéma d'homogénéisation (double inclusion, auto-cohérent).

### b Homogénéisation en deux étapes

L'homogénéisation en deux étapes consiste tout d'abord en la détermination des propriétés élastiques d'un composite unidirectionnel ; dans la suite de ce travail, nous avons adopté le schéma de Mori-Tanaka pour cette première étape, couramment employé dans la littérature. La seconde étape est une opération de moyenne selon les orientations, comme évoqué en section 1.3.1. Nous avons choisi d'estimer le tenseur de rigidité effectif soit à partir de la moyenne des raideurs (borne de Voigt) :

$$\tilde{\mathbb{C}} = \left\langle\mathbb{C}^{\mathrm{UD}}\right\rangle, \tag{5.17}$$

soit à partir de la moyenne des souplesses (borne de Reuss) :

$$\tilde{\mathbb{C}} = \left\langle\mathbb{S}^{\mathrm{UD}}\right\rangle^{-1}, \tag{5.18}$$

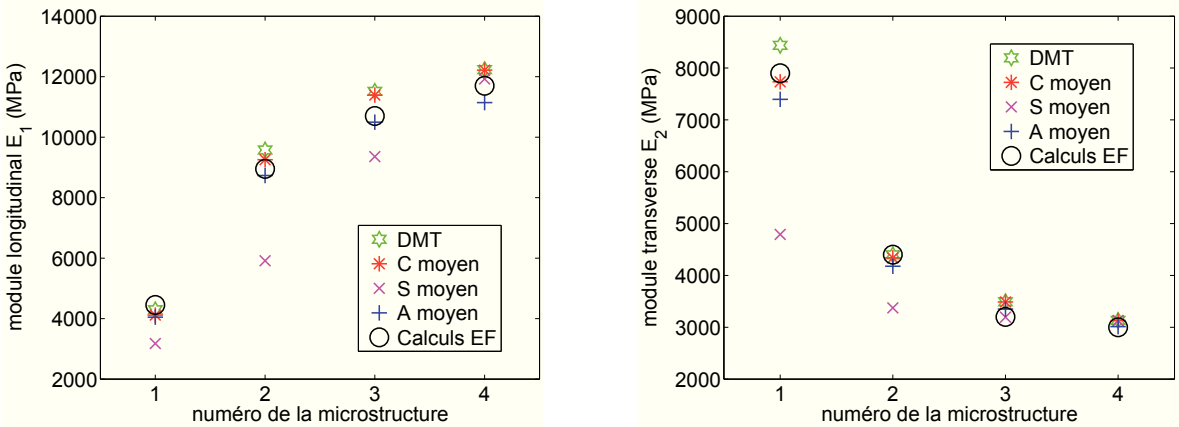



FIGURE 5.5 – Comparaison entre les modules élastiques prédits par la méthode DMT (Mori-Tanaka direct) et les trois méthodes d'homogénéisation en deux étapes (moyenne sur les raideurs, sur les souplesses ou sur les tenseurs de localisation) avec les calculs par éléments finis sur les quatre microstructures étudiées.

ou soit à partir de la moyenne du tenseur de localisation dans les fibres [7] :

$$\tilde{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^m + f\left(\mathbb{C}^f - \mathbb{C}^m\right) : \left\langle \mathbb{A}_f^{\mathrm{UD}} \right\rangle . \tag{5.19}$$

Nous pouvons remarquer que les quatre équations 5.16-5.19 sont équivalentes dans le cas limite d'un composite unidirectionnel.

### c Résultats

Nous mettons en œuvre chacune de ces méthodes d'homogénéisation pour les quatre microstructures présentées ci-dessus. Sur ces cas d'études, les fibres sont connues de façon individuelle, les opérations de moyenne sur les orientations sont donc simples à réaliser :

$$\langle \mathbb{X} \rangle = \frac{1}{f} \sum_{i=1}^{N} f_r \, \mathbb{X}(\theta_r, \phi_r) \tag{5.20}$$

La figure 5.5 présente les modules élastiques $E_1$ et $E_2$ calculés analytiquement avec ceux calculés par la méthode des éléments finis. Nous nous limitons à ces modules, car les chargements de traction dans les directions $\underline{e}_1$ et $\underline{e}_2$ sont les plus représentatifs des sollicitations observées sur pièce. Nous remarquons que la moyenne sur les raideurs permet au global d'obtenir les meilleures estimations [8]. Dans la suite de ce travail, nous choisissons donc d'évaluer les propriétés élastiques du PA66-GF35 (tenseur $\mathbb{C}^e$) à l'aide d'un schéma d'homogénéisation en deux étapes :

- détermination d'un composite unidirectionnel selon le modèle de Mori-Tanaka,
- moyenne des tenseurs de rigidités UD pondérée par la distribution des orientation de fibres.

7. Le tenseur de localisation dans le modèle de Mori-Tanaka s'exprime selon $\mathbb{A}_f^{\mathrm{UD}} = \mathbb{A}_f^{\mathrm{Esh}} : \left[(1-f)\mathbb{I} + f\mathbb{A}_f^{\mathrm{Esh}}\right]^{-1}$ avec $\mathbb{A}_f^{\mathrm{Esh}} = \left[\mathbb{I} + \mathbb{E} : \mathbb{S}^m : \left(\mathbb{C}^f - \mathbb{C}^m\right)\right]^{-1}$ qui est une expression équivalente à Eq. 1.4.

8. Les comparaisons avec les autres modules élastiques confirment ces résultats.

### 5.2.2 Développement dans le cas industriel

Dans le cas industriel, les codes de calcul rhéologique usuels (tels MOLDFLOW®, que l'on utilise dans cette étude) ne permettent pas de connaître la distribution d'orientation des fibres $\psi$ dans une pièce injectée ; seul le moment d'ordre 2 $\underline{\underline{a}}^{\psi}$ est calculé. L'opération de moyenne selon les orientations

$$\mathbb{C}^e = \left\langle \mathbb{C}^{\mathrm{UD}} \right\rangle \equiv \int_{\Omega} \mathbb{C}^{\mathrm{UD}}(\theta,\phi)\psi(\theta,\phi)\ \mathrm{d}\omega$$

ne peut donc pas être réalisée aussi simplement que dans les cas d'étude sur VER, et doit faire l'objet d'une procédure spécifique.

#### a Moyenne sur les orientations et tenseurs d'orientation

Un autre intérêt des tenseurs d'orientation est de pouvoir réaliser simplement des opérations de moyenne selon les orientations. Ainsi, pour moyenner des quantités tensorielles d'ordre $n$ (pair), il faut et il suffit de connaître les tenseurs d'orientation d'ordre $n$ (et inférieurs). L'équation 5.17 peut donc être reformulée en faisant apparaître $\underline{\underline{a}}^{\psi}$ et $\mathbb{A}^{\psi}$. D'après les travaux de Tandon et Weng [188], on peut définir les 5 composantes indépendantes du tenseurs des modules unidirectionnel $\mathbb{C}^{\mathrm{UD}}$ :

$$K_1 = C^{\mathrm{UD}}_{1111} - 2C^{\mathrm{UD}}_{1122} + C^{\mathrm{UD}}_{2233} - 4C^{\mathrm{UD}}_{1212} + 2C^{\mathrm{UD}}_{2323} \tag{5.21}$$
$$K_2 = C^{\mathrm{UD}}_{1122} - C^{\mathrm{UD}}_{2233} \tag{5.22}$$
$$K_3 = C^{\mathrm{UD}}_{1212} - C^{\mathrm{UD}}_{2323} \tag{5.23}$$
$$K_4 = C^{\mathrm{UD}}_{2233} \tag{5.24}$$
$$K_5 = C^{\mathrm{UD}}_{2323} \tag{5.25}$$

Advani et Tucker III [1] ont alors démontré l'expression suivante de $\mathbb{C}^e$, reprise par de nombreux auteurs [63, 129, 145] :

$$\mathbb{C}^e = K_1\mathbb{A}^{\psi} + K_2(\underline{\underline{a}}^{\psi} \otimes \underline{\underline{1}} + \underline{\underline{1}} \otimes \underline{\underline{a}}^{\psi}) + K_3\mathbb{D}(\underline{\underline{a}}^{\psi}, \underline{\underline{1}}) + 3K_4\mathbb{J} + 2K_5\mathbb{I} \tag{5.26}$$

#### b Performance des équations de fermeture

L'équation 5.26 fait intervenir le tenseur d'orientation d'ordre 4, qui doit être déterminé au moyen d'une équation de fermeture à partir de $\underline{\underline{a}}^{\psi}$. Nous avons évoqué l'existence de nombreuses équations de fermeture dans la littérature. De façon à choisir la plus pertinente du point de vue mécanique, nous comparons les prédictions des différents modules élastiques pour des distributions de fibres analytiques, pour lesquelles il est possible de déterminer le tenseur d'ordre 4 exact. Nous utilisons à nouveau la famille de distributions suggérée par Advani et Tucker III [1] $\psi(\theta,\phi) = K\ \sin^m\theta\ \cos^n\phi$. Nous fixons $m = 30$ pour étudier le cas de distributions quasi-planaires, et nous faisons varier $n$ dans l'intervalle $[0,\ 50]$.

Les résultats d'une telle comparaison sont présentés sur la figure 5.6. Nous avons choisi pour les propriétés élastiques de la matrice et des fibres des valeurs représentatives du PA66-GF35 de l'étude dans les conditions standard. L'équation de fermeture linéaire est la seule à prédire des modules élastiques très éloignés des valeurs théoriques ; en revanche, toutes les autres équations de fermeture fournissent des estimations présentant moins de 20 % d'erreur pour les distributions étudiées. Nous remarquons que les équations de fermeture orthotropes, et particulièrement l'équation orthotrope ajustée (ORF), sont celles qui donnent globalement les meilleures estimations des modules élastiques.

Nous n'avons pas tracé les résultats donnés par les équations de fermeture orthotropes ORW et ORW3 proposées par Chung et Kwon [44], car en ce qui concerne les propriétés mécaniques, elles fournissent des résultats équivalents à l'équation ORF.

#### c Discussion

Dans la suite de ces travaux, nous avons choisi d'évaluer les propriétés élastiques à l'aide de l'équation de fermeture orthotrope souple (ORS). En effet, les équations quadratiques et hybrides donnent des résultats légèrement moins bons que les équations de fermeture orthotropes, et présentent de plus l'inconvénient d'aboutir à un tenseur d'orientation qui ne respecte pas toutes les conditions de symétrie.

L'équation de fermeture ORF donne certes de meilleurs résultats que l'équation de fermeture souple, pour les microstructures analytiques étudiées, mais dans un premier temps, nous préférons conserver l'équation de fermeture ORS, dont les coefficients d'interpolation ne dépendent pas d'une caractérisation effectuée dans des cas particuliers (choix de valeurs de $\lambda$ et $C_I$, types d'écoulements élémentaires). Nous faisons ainsi le choix de la robustesse au détriment de celui de la précision.

Il faut cependant garder à l'esprit que l'équation de fermeture ORF peut constituer un axe d'amélioration de notre modèle. Nous considérons que le changement d'équation de fermeture doit être motivé par une analyse sur des microstructures réelles (mesurées par microtomographie par exemple) ; ce travail n'a pas pu être effectué dans le temps imparti de la thèse.

## 5.3 Influence de la microstructure sur les propriétés viscoplastiques

La distribution d'orientation des fibres n'a pas seulement une influence sur les propriétés élastiques, mais également sur les caractéristiques viscoplastiques du comportement. En effet, des essais mécaniques effectués dans le sens transverse aux fibres mettent en évidence une réponse plus souple, mais aussi plus ductile que dans le sens longitudinal. Cela s'explique aisément par des niveaux de déformation plus importants dans la matrice, et l'activation de micro-mécanismes de déformation irrécouvrables. Nous détaillons dans cette section comment prendre en compte de façon phénoménologique ces observations dans le cadre du modèle de comportement proposé.

### 5.3.1 État de l'art succinct

Dans la littérature, il existe plusieurs façons de modéliser une réponse élasto-viscoplastique anisotrope. Ces méthodes sont en général inspirées des travaux de Hill [90], qui a proposé de remplacer la contrainte équivalente de von Mises (isotrope dans l'espace des déviateurs), par une contrainte déviatorique orthotrope :

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\underline{\underline{\sigma}} : \mathbb{P} : \underline{\underline{\sigma}}} \quad \text{avec} \quad \mathbb{P} = \begin{bmatrix} (B+D) & -B & -D & 0 & 0 & 0 \\ -B & (B+C) & -C & 0 & 0 & 0 \\ -D & -C & (C+D) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2F & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2G \end{bmatrix} \tag{5.27}$$

Le caractère de norme impose que le tenseur d'ordre 4 $\mathbb{P}$ soit symétrique et défini positif (dans l'espace des déviateurs). Des versions généralisées de cette expression ont été développées ultérieurement par d'autres auteurs [14, 154]. Certains proposent notamment d'étendre cette formulation à des critères non déviatoriques, avec une dépendance à la pression hydrostratique [191], ce qui s'écrit $P_{ijkk} \neq 0$.

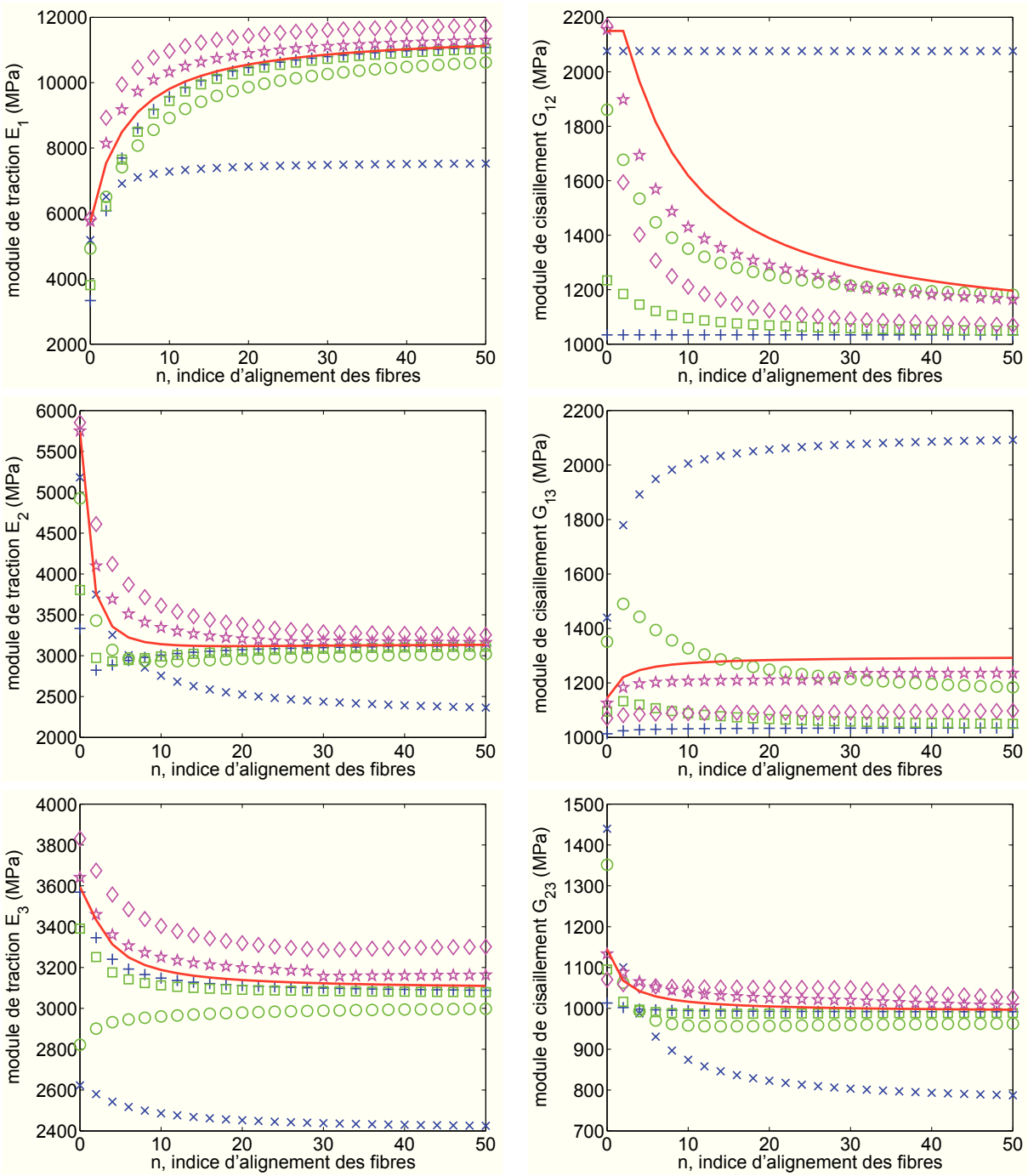



FIGURE 5.6 – Comparaison entre les propriétés mécaniques prédites à l'aide du tenseur d'orientation exact (trait continu) et celles déduites des différentes équations de fermeture (L ×, Q +, HA ○, HB □, ORS ◇, ORF ☆), en fonction du taux d'alignement des fibres $n$.

Dans le cadre d'une réponse mécanique présentant un écrouissage, il est possible de remplacer les scalaires $C$ et $\gamma$ intervenant dans l'expression de la loi d'Armstrong-Frederick par des opérateurs tensoriels d'ordre 4 : $\underline{\underline{X}} = \mathbb{H} : \underline{\underline{\alpha}}$, etc. De telles équations ont été utilisées par Delobelle et al. [56], ce qui permet en effet une modélisation fine du comportement anisotrope non linéaire. En revanche, une telle approche suppose l'identification d'un nombre élevé de paramètres matériaux, avec une procédure d'identification complexe.

Enfin, nous pouvons également rappeler la modélisation proposée par Andriyana et al. [6]. Les auteurs expriment la loi d'écoulement élastoplastique dans la direction moyenne des fibres ; l'avantage d'une telle formulation réside essentiellement dans le fait de faire directement intervenir le tenseur d'orientation $\underline{\underline{a}}^{\psi}$ dans l'expression de la loi de comportement.

Comme nous l'avons déjà évoqué au chapitre 3, nous faisons le choix de modéliser la réponse non linéaire anisotrope à l'aide d'une contrainte viscoplastique équivalente construite selon un tenseur $\mathbb{P}$. Les autres modélisations envisageables sont des extensions possibles du modèle, mais ne sont pas retenues pour cette étude. En effet, en l'absence d'essais de comportement réalisés en compression, nous n'avons pas suffisamment d'éléments pour justifier la mise en place d'une contrainte équivalente dépendante à la pression hydrostatique ; par ailleurs, des tenseurs d'écrouissage rendent difficile voire impossible la réduction du modèle de comportement à une forme uni-dimensionnelle : toute la procédure d'identification des paramètres matériaux serait alors à revoir – et trop coûteuse.

### 5.3.2 Modélisation orthotrope de la contrainte viscoplastique équivalente

Dans notre cas, nous devons relier l'expression du tenseur $\mathbb{P}$ à la microstructure locale, c'est-à-dire, dans le cas des thermoplastiques injectés et renforcés de fibres courtes, au tenseur d'orientation d'ordre 2. La formulation de $\mathbb{P}$ doit également vérifier une condition physique supplémentaire, à savoir que les symétries éventuelles de la distribution locale de fibres doivent être retranscrites par $\mathbb{P}$. Ainsi, par exemple, $\underline{\underline{a}}^{\psi} = \frac{1}{3}\underline{\underline{1}}$ implique que $\mathbb{P}$ soit proportionnel à $\mathbb{K}$, de façon à obtenir une norme équivalente à la norme de von Mises.

Nous proposons une formulation de $\mathbb{P}$ qui respecte toutes ces conditions ; ce tenseur est orthotrope (au sens de Hill [90]) dans le repère matériel local et s'est exprime selon :

$$\mathbb{P}(\underline{\underline{a}}^{\psi}) = \begin{bmatrix} (1-a_1)^k & \overline{P}_{1122} & \overline{P}_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ \overline{P}_{1122} & (1-a_2)^k & \overline{P}_{2233} & 0 & 0 & 0 \\ \overline{P}_{1133} & \overline{P}_{2233} & (1-a_3)^k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \end{bmatrix}_{(\underline{u}_i)} \tag{5.28}$$

avec $\overline{P}_{1122} = \frac{1}{2}\left((1-a_3)^k - (1-a_2)^k - (1-a_1)^k\right)$, et de même pour $\overline{P}_{1133}$ et $\overline{P}_{2233}$ par permutation circulaire. Cette formulation conduit à une contrainte équivalente $\mathcal{J}_{vp} = \sqrt{(\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{X}}) : \mathbb{P} : (\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{X}})}$ plus élevée pour des chargements dans des directions où peu de fibres sont alignées, activant ainsi les mécanismes viscoplastiques.

L'exposant $k$ est un coefficient matériel supplémentaire, que nous appelons coefficient d'anisotropie, qui permet de décrire la sensibilité de la réponse viscoplastique à la microstructure. En effet, nous avons pu observer qu'une faible variation d'orientation autour d'une microstructure globalement bien orientée (par exemple une variation de $a_1$ lorsque $a_1$ proche de 1) induit une assez forte variation de la réponse mécanique non linéaire. En revanche, lorsque la microstructure est peu orientéee ($a_1 \sim a_2 \sim a_3 \sim \frac{1}{3}$), la réponse mécanique est moins sensible à une modification de l'état d'orienta-

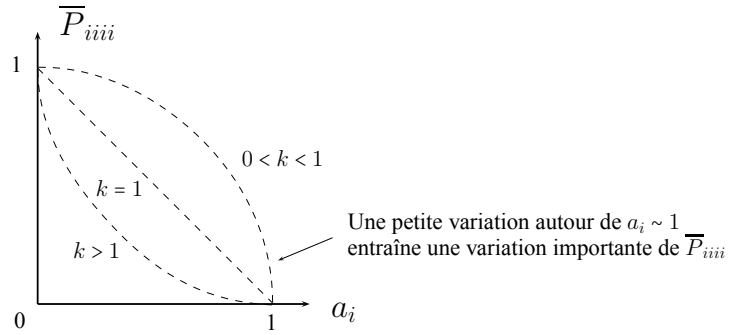



FIGURE 5.7 – Évolution des composantes $iiii$ du tenseur $\mathbb{P}$ (exprimé dans le repère matériel) en fonction des valeurs propres $a_i$ du tenseur d'orientation d'ordre 2.

tion. La figure 5.7 permet de saisir le sens physique du paramètre $k$, et nous comprenons que pour être cohérent avec les observations énoncées ci-dessus, la valeur de $k$ doit être comprise entre 0 et 1.

### a Une norme naturelle comme alternative

Nous savons que les mécanismes à l'origine d'une réponse macroscopique viscoplastique sont essentiellement localisés dans la matrice (voir section 1.2). Puisqu'à notre échelle la matrice est isotrope, nous pouvons postuler qu'une norme de von Mises construite à partir de la contrainte moyenne dans la phase matrice peut constituer un bon indicateur de l'activation des mécanismes viscoplastiques. En outre, lorsque la contrainte macroscopique est proche du seuil apparent de déclenchement de ces mécanismes, nous considérons que les relations de changement d'échelle pour des comportements linéaires sont encore valables. Il est alors possible de construire à l'échelle du composite une norme équivalente à la norme de von Mises formulée pour la phase matricielle :

$$\underline{\underline{\sigma}}^m : \mathbb{K} : \underline{\underline{\sigma}}^m = \underline{\underline{\Sigma}} : \mathbb{P}^{\text{eq}} : \underline{\underline{\Sigma}} \tag{5.29}$$

où nous avons noté $\underline{\underline{\Sigma}}$ la contrainte macroscopique [9] et $\underline{\underline{\sigma}}^m$ la contrainte moyenne dans la matrice. $\mathbb{P}^{\text{eq}}$ est un tenseur d'ordre 4 anisotrope qui s'écrit analytiquement selon :

$$\mathbb{P}^{\text{eq}} = \left(\tilde{\mathbb{C}}\right)^{-1} : {}^t\tilde{\mathbb{A}}^m : \mathbb{C}^m : \mathbb{K} : \mathbb{C}^m : \tilde{\mathbb{A}}^m : \left(\tilde{\mathbb{C}}\right)^{-1} \tag{5.30}$$

avec $\tilde{\mathbb{C}}$ le tenseur de rigidité effectif du composite – calculé selon un schéma d'homogénéisation en deux étapes, $\mathbb{C}^m$ celui de la matrice, et $\tilde{\mathbb{A}}^m$ le tenseur de localisation dans la matrice [10]. Nous construisons ainsi une norme « naturelle » pour notre matériau. Remarquons en outre qu'elle n'est pas déviatorique à l'échelle du composite, mais uniquement de la matrice.

Nous constatons sur la figure 5.8 que cette approche, qui repose sur une modélisation physique plus fine, est similaire à la norme proposée (Eq. 5.28). Par ailleurs, nous n'avons pas retenu cette modélisation dans la suite de nos travaux, car en dépit de l'avantage de ne pas faire intervenir de paramètre matériau supplémentaire, elle ne permet pas de décrire de façon aussi satisfaisante la réponse mécanique. Il est ainsi possible que la détection d'un pseudo-seuil viscoplastique sur la valeur

9. Dans notre approche phénoménologique, nous avons noté $\underline{\underline{\sigma}}$ la contrainte macroscopique, alors qu'elle s'écrit $\underline{\underline{\Sigma}}$ pour des approches micromécaniques ; nous faisons ici la distinction par souci de clarté.

10. Le tenseur de localisation dans la matrice se calcule à partir de la relation $\tilde{\mathbb{C}} = \langle \mathbb{C} : \mathbb{A} \rangle$ (Eq. 1.2 page 23), qui implique $\tilde{\mathbb{A}}^m = \frac{1}{1-f}\left(\mathbb{C}^m - \mathbb{C}^f\right)^{-1} : \left(\tilde{\mathbb{C}} - \mathbb{C}^f\right)$ ; ce tenseur n'est pas égal à son transposé ${}^t\tilde{\mathbb{A}}^m$.

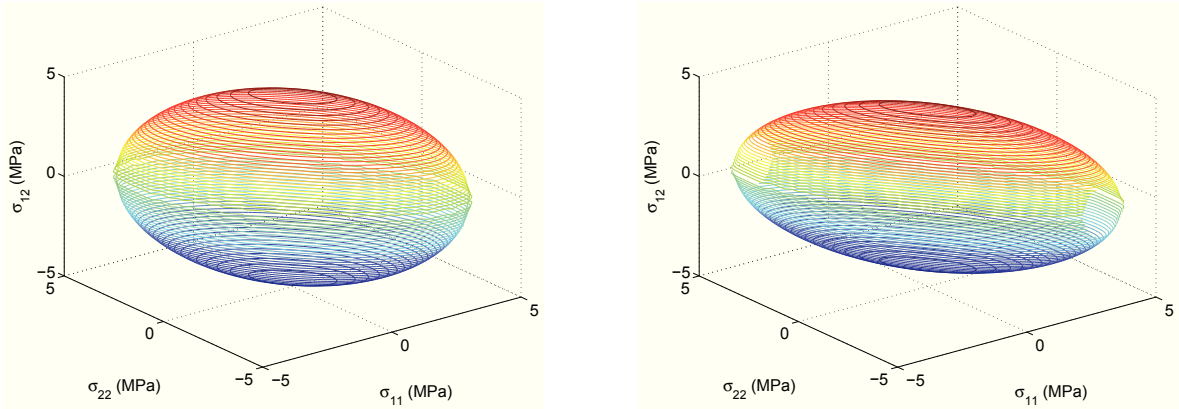



FIGURE 5.8 – Comparaison entre une iso-surface dans l'espace des contraintes au sens de la norme $\mathbb{P}$ (à gauche), ou au sens de la norme $\mathbb{P}^{\text{eq}}$ (à droite). Dans cet exemple, $\{a_i\} = \{0.65, 0.3, 0.05\}$ et $k = 0.5$.

moyenne de la contrainte dans la matrice soit insuffisant, et qu'il faille également prendre en compte les écarts-types intraphasiques.

### b Formulation de l'équation d'évolution de l'écrouissage

Nous avons présenté en section 3.2 les équations d'évolution du problème mécanique. Remarquons une légère modification dans la formulation de l'équation régissant l'évolution de la variable d'écrouissage, qui s'écrit habituellement dans le cas isotrope :

$$\dot{\underline{\underline{\alpha}}} = -\dot{p}\left(\underline{\underline{n}}_{vp} + \gamma\mathbb{K} : \underline{\underline{\alpha}}\right) \tag{5.31}$$

Or, le fait d'introduire une norme anisotrope explique que le tenseur $\underline{\underline{n}}_{vp} = \mathbb{P} : \left(\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{X}}\right)/\mathcal{J}_{vp}$ n'est plus de norme constante. De façon à pouvoir conserver quelle que soit la microstructure la valeur du paramètre $\gamma$ identifié dans le cas particulier des éprouvettes ISO527-2-1A, nous avons choisi de modifier cette équation pour l'écrire :

$$\dot{\underline{\underline{\alpha}}} = -\dot{p}\left(\underline{\underline{n}}_{vp} + \frac{2\gamma}{3}\mathbb{P} : \underline{\underline{\alpha}}\right) \tag{5.32}$$

Ainsi le ratio entre la composante linéaire (selon $\underline{\underline{n}}_{vp}$) et la composante non linéaire (selon $\gamma\underline{\underline{\alpha}}$) est conservé, ce qui permet une meilleure concordance avec les résultats expérimentaux. En effet, en l'absence de cette modification, nous avons observé que sur des essais de traction monotone, la valeur de la contrainte asymptotique (à vitesse de chargement fixée) ne dépend pas de l'orientation des fibres, ce qui est en contradiction avec les observations expérimentales.

## 5.4 Validation de la prise en compte de la microstructure sur la réponse mécanique

Dans cette section, nous présentons les résultats du modèle de comportement avec prise en compte de l'anisotropie. Ce modèle est appliqué à des essais de traction sur des éprouvettes présentant différentes microstructures. Une étape préliminaire consiste en la détermination des propriétés élastiques

de la matrice PA66 seule. L'application du modèle de comportement non linéaire fait intervenir les paramètres du modèle identifiés au chapitre 3, seul le coefficient $k$ fait l'objet d'une identification supplémentaire.

### 5.4.1 Propriétés élastiques de la matrice

Des essais de traction ont été réalisés lors d'une étude préliminaire au LBF [11] sur des éprouvettes prélevées dans des plaques injectées à 0°, 45° et 90° [84]. Ces plaques sont de dimensions 80×80×3 mm$^3$, et les éprouvettes de traction sont découpées au centre de la plaque, leur zone utile présente une longueur de 20 mm et une section de 8×3 mm$^2$. Nous avons également utilisé les modules élastiques de l'éprouvette ISO527-2-1A. Les tenseurs d'orientation d'ordre 2 (moyennés sur le volume utile) correspondant à ces deux microstructures sont :

$$\underline{\underline{a}}^{\psi}_{\text{plaque, centre}} = \begin{bmatrix} 0.589 & -0.004 & 0. \\ -0.004 & 0.402 & 0. \\ 0. & 0. & 0.009 \end{bmatrix}, \qquad \underline{\underline{a}}^{\psi}_{\text{ISO527-2-1A}} = \begin{bmatrix} 0.916 & -0.004 & 0. \\ -0.004 & 0.064 & 0. \\ 0. & 0. & 0.020 \end{bmatrix}.$$

Une identification inverse sur les coefficients élastiques de la matrice polyamide ($E_{\text{mat}}, \nu_{\text{mat}}$) permet d'aboutir au jeu de paramètres présenté dans le tableau 5.1 ; les résultats de la procédure d'optimisation sont récapitulés dans le tableau 5.2. Notons que les coefficients élastiques des fibres ainsi que leur rapport d'aspect sont spécifiés par le fournisseur de matière première, et que l'équation de fermeture ORS est utilisée pour l'homogénéisation en deux étapes.

Les valeurs dans le cas DAM sont tout à fait en accord avec les données de la littérature ; en revanche, le module de Young identifié pour la matrice PA66 conditionnée à $\mathcal{H}$=50 % et 23 ˚C est plus élevé que la valeur proposée par le fournisseur. Cette différence s'explique par la viscoélasticité court terme dont les effets sont importants au voisinage de la température de transition vitreuse : des essais de traction réalisés à vitesse lente (5 mm/min) ne permettent pas d'identifier directement le module élastique du PA66 mais plutôt une combinaison de ce module et du module viscoélastique [12]. Nous conservons ces valeurs pour la suite de nos travaux.

### 5.4.2 Microstructures étudiées

Nous nous intéressons désormais aux éprouvettes qui ont servi de validation pour la prise en compte de la distribution d'orientation de fibres dans l'approche phénoménologique. Comme présenté sur la figure 5.9, il s'agit d'éprouvettes ISO527-2-5A (voir annexe A.2) découpées dans des plaques injectées. Les éprouvettes sont soit prélevées au centre des plaques, à différents angles ($\alpha$ = 0, 30, 45, 60, 90°), soit sur le bord des plaques ($\alpha$ = 0°). Nous faisons ainsi varier l'angle entre la direction du chargement et le repère matériel local dans le premier cas, tandis que les éprouvettes prélevées sur le bord permettent d'évaluer la sensibilité à l'intensité de l'alignement des fibres.

Les plaques dans lesquelles ont été prélevées les éprouvettes de traction sont dans les conditions standard ($\mathcal{H}$=50 %, $T$=23 ˚C). Les essais réalisés sur ces éprouvettes ont fait l'objet d'une campagne expérimentale sous-traitée au CETIM [13].

11. LBF : Frauhofer Institut Betriebsfestigkeit Systemzuverlässigkeit, Darmstatdt, Allemagne. Ce laboratoire et centre d'essais a sous-traité en 2006 une campagne expérimentale sur le matériau de l'étude pour le bénéfice de PSA et de certains fournisseurs.

12. Les effets viscoélastiques, éventuellement anisotropes, peuvent également expliquer les écarts plus importants entre résultats expérimentaux et numériques pour les modules élastiques apparents de microstructures faiblement alignées selon l'axe de chargement, comme nous le verrons plus loin.

13. CEntre Technique des Industries Mécaniques

| Propriétés élastiques des constituants à 23 ˚C | | | |
|---|---|---|---|
| | Module de Young (MPa) | Coefficient de Poisson | Densité |
| PA66 DAM | 3063 *(3100)* | 0.38 *(0.36)* | 1.14 |
| PA66 RH50 | 1987 *(1400)* | 0.40 *(0.41)* | 1.14 |
| Verre | 72000 | 0.22 | 2.54 |

| Propriétés microstructurales des fibres de verre courtes | | |
|---|---|---|
| Fraction massique | Fraction volumique | Rapport d'aspect |
| 35 % | 19.5 % | 25 |

TABLE 5.1 – Propriétés mécaniques et physiques du PA66-GF35 de l'étude (en italique des valeurs proposées par la littérature).

| | DAM, 23 ˚C | | | RH50, 23 ˚C | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | mesure exp. MPa | modèle MPa | *erreur rel.* % | mesure exp. MPa | modèle MPa | *erreur rel.* % |
| ISO527-2-1A | 12500 | 13161 | *5.3* | 11300 | 11300 | *0.0* |
| plaque, 0° | 9389 | 8720 | *-7.1* | 5495 | 4773 | *-13.1* |
| plaque, 45° | 7029 | 7029 | *0.0* | 3971 | 3971 | *0.0* |
| plaque, 90° | 7066 | 7058 | *-0.1* | 3566 | 3995 | *12.0* |

TABLE 5.2 – Modules de traction apparents mesurés expérimentalement et prédits par le modèle d'homogénéisation en deux étapes, pour l'éprouvette ISO527-2-1A ainsi que pour les éprouvettes de traction prélevées dans les plaques de dimensions 80×80×3 mm$^3$.

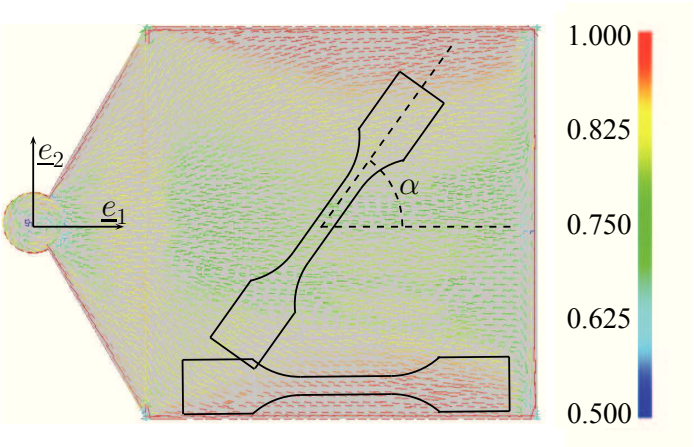
Les coefficients du modèle de comportement sous sa forme finale sont donc :
- les paramètres élastiques des fibres de verre (connus) ;
- les paramètres élastiques de la matrice PA66 (déterminés par identification inverse – voir ci-dessus) ;
- la fraction volumique de fibres $f$ ainsi que leur rapport d'aspect $r$ (connus) ;
- les paramètres du modèle phénoménologique correspondant aux caractéristiques non linéaires (identifiés sur éprouvette ISO527-2-1A) ;
- le coefficient d'anisotropie $k$.

Nous constatons que seul le coefficient $k$ n'est pas déterminé. Une identification inverse effectuée à partir des résultats des courbes anhystérétiques permet de fixer sa valeur à 0.5276, ce qui est cohérent avec la condition physique $k \in [0,\ 1]$ formulée lors de la section précédente. Ce paramètre traduit la sensibilité de la contrainte équivalente $\mathcal{J}_{vp}$ à la microstructure, il n'était donc pas possible de l'identifier auparavant. En revanche, il est supposé indépendant des conditions environnementales.

### 5.4.3 Résultats et discussion

#### a Tractions monotones

Nous présentons sur la figure 5.10 les prédictions du modèle de comportement, comparées aux résultats expérimentaux, pour des courbes de traction monotone. Nous constatons une bonne descrip-




Tenseur d'orientation moyenné sur le volume utile :

$$\underline{\underline{a}}^{\psi}_{\text{centre}} = \begin{bmatrix} 0.684 & -0.041 & 0. \\ -0.041 & 0.298 & 0. \\ 0. & 0. & 0.018 \end{bmatrix}_{(\underline{e}_i)}$$

$$\underline{\underline{a}}^{\psi}_{\text{bord}} = \begin{bmatrix} 0.899 & -0.102 & 0. \\ -0.102 & 0.084 & 0. \\ 0. & 0. & 0.017 \end{bmatrix}_{(\underline{e}_i)}$$

FIGURE 5.9 – Simulation d'injection de la plaque réalisée avec MOLDFLOW®, et affichage de l'orientation moyenne sur l'épaisseur $\frac{1}{2}\int_0^2 a_1(z)\,\mathrm{d}z$ selon la direction propre $\underline{u}_1$. Les dimensions de la plaque sont de 100×100×2 mm$^3$ tandis que la longueur de l'éprouvette de traction vaut 75 mm (zone utile de longueur 20 mm, de section 4×2 mm$^2$). $\underline{e}_1$ est l'axe principal du flux d'injection.

tion de la sensibilité à la vitesse de chargement. Aux déformations importantes (supérieures à 3 %), la réponse du modèle est en général moins bien corrélée à la réponse expérimentale, mais dans l'optique d'une application à la fatigue, cet écart n'est pas jugé critique. À 2.5 MPa/s, le modèle sur-estime la raideur initiale à 45, 60 et 90°, mais pas à 250 MPa/s. Par ailleurs, le modèle rend également bien compte de la faible sensibilité à l'angle entre la direction de traction et le repère matériel au-delà de $\alpha = 45°$.

La modification apportée à l'équation d'évolution de la variable d'écrouissage prend tout son sens sur les essais de traction, puisque nous constatons une très forte variation de la contrainte asymptoptique en fonction de l'état d'orientation, et qui est relativement bien retranscrite par le modèle.

### b Essais complexes

Pour valider la modélisation de l'influence de la microstructure sur les caractéristiques viscoplastiques, nous affichons sur la figure 5.11 la corrélation calcul-essai pour des histoires de chargement complexes. Nous ne présentons les résultats que pour 3 microstructures, puisque les réponses à 45 et 90° sont proches de celle à 60°, et l'éprouvette prélevée à 0° au centre de la plaque se classe naturellement entre celle à 30° et celle à 0° découpée au bord.

En ce qui concerne les courbes anhystérétiques, la prédiction du modèle est très satisfaisante, avec notamment une bonne description des paliers de relaxation. La réponse du modèle pour l'essai FRC est globalement bonne, malgré un écart plus important pour l'éprouvette $\alpha$=60°. La modélisation proposée du tenseur $\mathbb{P}$ semble donc pertinente au vu de ces résultats.

### c Proposition d'amélioration de la modélisation

La dépendance de la raideur initiale à la distribution locale d'orientation est correctement prédite aux vitesses de chargement élevées, alors que des écarts sont observés aux vitesses plus faibles. Par ailleurs, les essais FRC montrent une sous-estimation de la réponse viscoélastique lorsque l'angle $\alpha$ augmente : la déformation prédite est inférieure aux valeurs expérimentales sur le second palier de

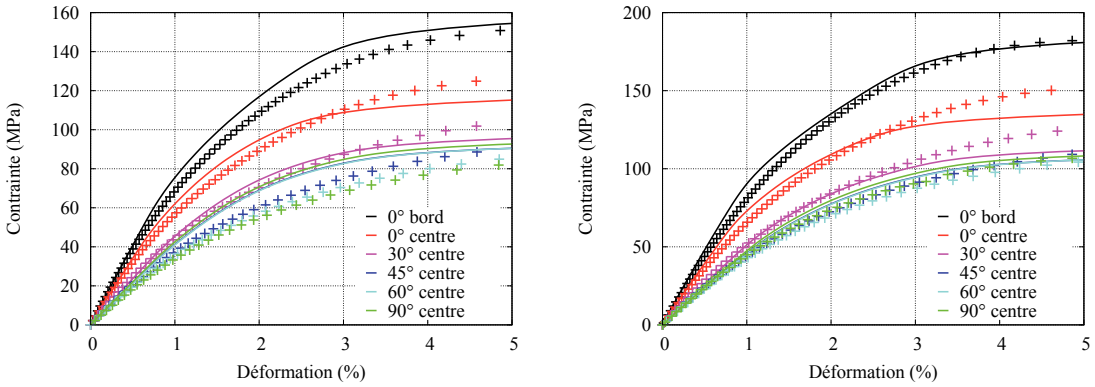
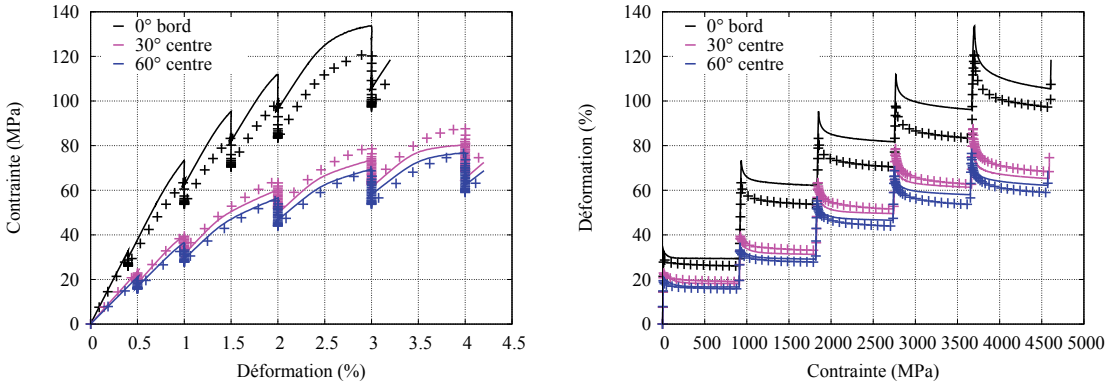
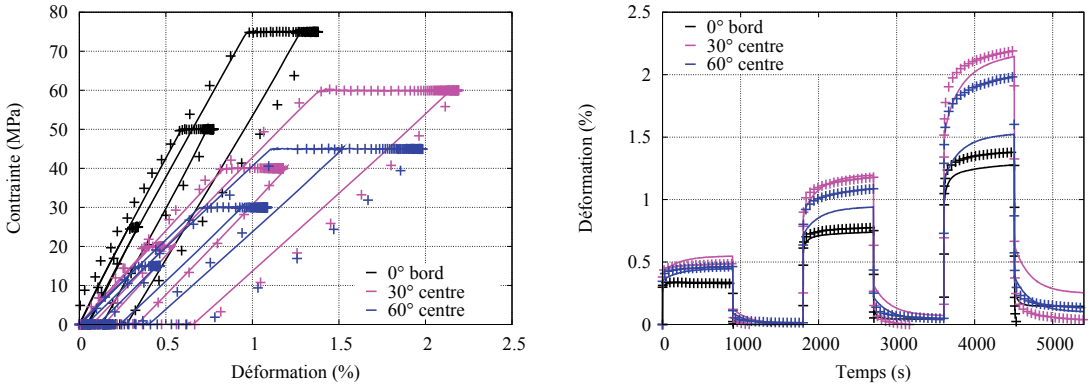



FIGURE 5.10 – Comparaison calcul-essai sur les essais de traction monotone pour des différentes éprouvettes ISO527-2-5A prélevées dans des plaques, pour deux vitesses différentes : 2.5 MPa/s (gauche) et 250 MPa/s.




(a) Courbes anhystérétiques pilotées 0.3 %/s




(b) Essais FRC pilotés 25 MPa/s

FIGURE 5.11 – Comparaison calcul-essai pour des histoires de chargement complexes pour des différentes éprouvettes ISO527-2-5A prélevées dans des plaques.

fluage, alors que les mécanismes viscoplastiques ne sont pas (ou peu) activés puisque la recouvrance sur le palier suivant est presque totale.

Nous pouvons supposer que ces deux bémols à apporter à la bonne prédictivité du modèle proposé sont les conséquences d'une hypothèse implicitement faite : l'isotropie des composantes viscoélastiques de la déformation (hypothèse également émise par Andriyana et al. [6] pour un problème similaire). En effet, nous n'avons pas explicité de lien entre la microstructure locale et les tenseurs $\mathbb{C}^{v_i}$ ou les paramètres $\eta_i$. De façon à corriger ce point, nous pouvons imaginer une extension du modèle actuel fondée sur les techniques d'homogénéisation des matériaux viscoélastiques linéaires (voir section 1.3.1), voire même plus simplement postuler une règle de proportionnalité entre $\mathbb{C}^e$ et $\mathbb{C}^{v_i}$. Néanmoins, faute de temps et parce que le degré de précision actuel est jugé satisfaisant, la modélisation anisotrope de la réponse viscoélastique (à court et long terme) n'a pas été développée.

### d Bilan

D'une façon générale, nous considérons que ces résultats sont très intéressants, puisque l'introduction d'un seul paramètre matériau supplémentaire [14] $k$, permet de décrire avec une bonne précision la réponse anisotrope non linéaire. Les données d'entrée du modèle de comportement phénoménologique sont maintenant :

- le tenseur d'orientation d'ordre 2 (calculé par un logiciel de simulation d'injection comme MOLDFLOW®), qui condense l'information sur la microstructure locale ;
- les conditions environnementales $T$ et $\mathcal{H}$.

Du point de vue industriel, nous insistons sur le caractère aisé de notre procédure d'identification, qui repose essentiellement sur des essais de traction réalisés sur les éprouvettes ISO527-2-1A. La description de la réponse anisotrope ne nécessite alors que la détermination des coefficients élastiques de la matrice thermoplastique, ainsi que l'identification du paramètre $k$ (dont l'ordre de grandeur est connu). Le lien avec la microstructure est effectué au moyen du tenseur d'orientation d'ordre 2, qui est une sortie usuelle des codes de simulation d'injection. Nous avons donc démontré qu'il est possible, à l'aide d'un modèle phénoménologique, d'obtenir une bonne prédiction de la réponse cyclique non linéaire des thermoplastiques renforcés injectés, pour différentes distributions locales de fibres.

Remarquons toutefois qu'il s'est avéré nécessaire de faire appel à des résultats de micromécanique, mais uniquement en ce qui concerne les propriétés élastiques : les techniques analytiques déployées (schéma de Mori-Tanaka, moyenne selon les orientations) ne sont pas coûteuses du point de vue numérique, ce qui est un atout certain pour une application sur structure industrielle, comme nous le présentons au chapitre suivant.

14. Les caractéristiques élastiques du verre, la fraction volumique de fibres $f$ et leur rapport d'aspect $s$ ne sont pas des paramètres du modèle, puisqu'ils n'ont pas nécessité d'identification. Par ailleurs, le modèle suppose l'identification des paramètres élastiques de la matrice, mais l'ajout de ces deux paramètres est compensé par le fait qu'il n'est plus nécessaire d'identifier les coefficients élastiques à l'échelle du composite.

# Chapitre 6

# Validation sur structures

**Sommaire**


**6.1 Principe de la chaîne de calcul numérique . . . . . 125**
6.1.1 Simulation d'injection . . . . . 126
6.1.2 Transfert du champ tensoriel d'orientation . . . . . 127
6.1.3 Simulation de la réponse mécanique . . . . . 127
**6.2 Éprouvettes de fatigue . . . . . 128**
6.2.1 Conditions de la corrélation calculs-essais . . . . . 128
6.2.2 Comparaison des réponses mécaniques à l'échelle de la zone utile . . . . . 129
6.2.3 Comparaison des champs de déformation . . . . . 130
6.2.4 Discussion . . . . . 131
**6.3 Répartiteur d'air à l'admission . . . . . 134**
6.3.1 Conditions de la corrélation calculs-essais . . . . . 134
6.3.2 Résultats . . . . . 137
6.3.3 Discussion . . . . . 139


Dans ce chapitre, nous présentons la chaîne de calcul numérique nécessaire à la détermination de la réponse mécanique sur structures. Dans un premier temps, nous appliquons le modèle de comportement développé lors des chapitres précédents sur trois géométries d'éprouvettes de fatigue injectées, qui font office de cas de validation intermédiaire : suffisamment complexes pour mettre en évidence l'apport de la richesse de la loi de comportement, et suffisamment simples pour permettre un bon contrôle des grandeurs locales (distribution d'orientation des fibres, champs de déformation). Dans un second temps, nous présentons l'application du modèle sur une pièce industrielle complexe, le répartiteur d'air à l'admission, sous sollicitations cycliques et à température élevée.

## 6.1 Principe de la chaîne de calcul numérique

La figure 6.1 résume graphiquement les différentes étapes, détaillées ci-dessous, nécessaires à la détermination de la réponse mécanique d'une pièce réalisée par injection de thermoplastique renforcé en fibres de verre courtes. La méthode que nous présentons ici est compatible avec un déploiement en bureau d'études industriel.

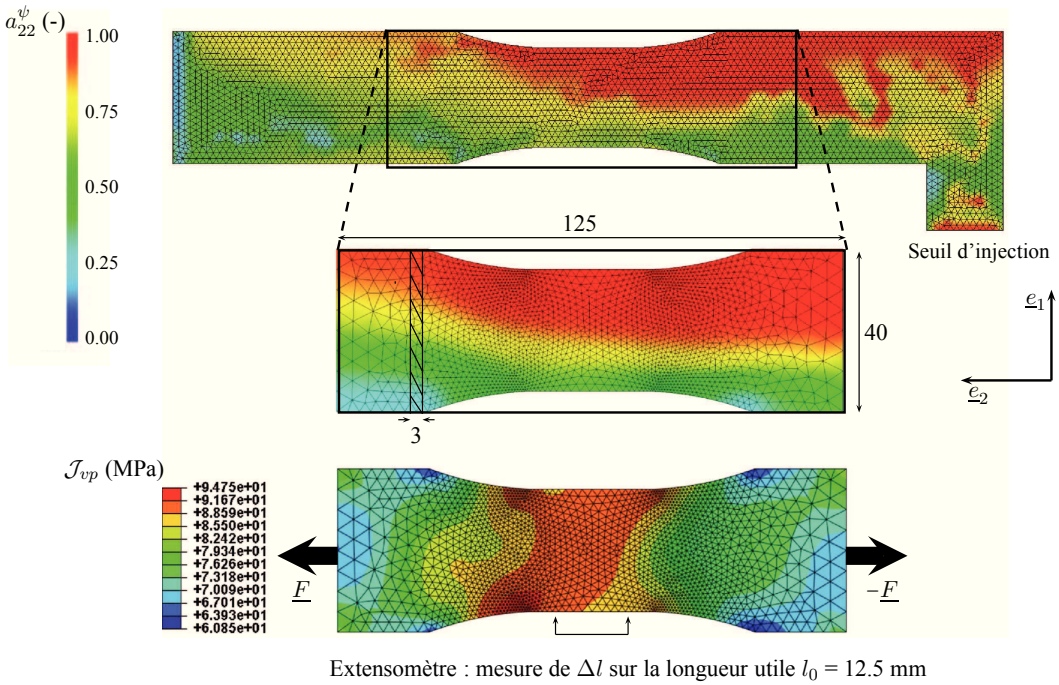



FIGURE 6.1 – Schéma du principe de la chaîne numérique :
1. Simulation d'injection sous MOLDFLOW® et calcul du champ de tenseurs d'orientation (affichage de la composante $a_{22}^{\psi}$ à cœur) ;
2. Interpolation du champ $\underline{\underline{a}}^{\psi}$ avec DIGIMAT® sur le maillage adapté au calcul mécanique ;
3. Résolution sous ABAQUS®, à l'aide d'une routine utilisateur UMAT, du problème mécanique (affichage de la contrainte équivalente $\mathcal{J}_{vp}$ pour $F$ = 12.4 kN, sous un environnement hygrothermique $T$=23 °C, $\mathcal{H}$=50 %).

### 6.1.1 Simulation d'injection

La première étape est la simulation du procédé de mise en forme par injection. Dans le cadre de ces travaux de thèse, nous avons utilisé le logiciel MOLDFLOW®, qui requiert la spécification des conditions d'injection :

- position des seuils d'injection,
- temps d'injection (ou débit de matière), temps de compactage,
- pression d'injection et pression de compactage,
- température de la matière fondue en sortie de vis,
- température du moule,
- caractéristiques rhéologiques (loi de viscosité) et thermiques du matériau.

Le calcul de l'orientation des fibres est consécutif à la résolution du problème rhéologique d'injection. En fonction de la géométrie de la pièce, MOLDFLOW® propose deux méthodes de résolution. Pour les structures planes, la méthode *mid-plane* fait intervenir des éléments coques multi-couches : le tenseur d'orientation est donc calculé sur la géométrie 2D, avec une caractérisation supplémentaire sur l'épaisseur. Cette méthode est plus rapide et permet de bien caractériser l'effet cœur-peau, mais demande la spécification d'un coefficient empirique $D_z$ en plus du coefficient d'interactions fibres-fibres

$C_I$ intervenant dans l'équation de Folgar-Tucker [72]. Pour les structures de géométrie complexe, un maillage volumique est préférable, de façon à correctement tenir compte du caractère 3D de l'écoulement et de la distribution d'orientation. Dans ce cas, seul le coefficient $C_I$ doit être précisé. La résolution est plus lourde, et s'appuie sur un maillage nécessitant une adaptation anisotrope [153] de façon à pouvoir rendre compte de l'effet cœur-peau.

Dans ces travaux, nous avons conservé les valeurs par défaut de MOLDFLOW®, à savoir $C_I = 0.001$ (et $D_z = 0.75$ pour les calculs 2D) [63]. Néanmoins, certains travaux ont pu mettre en évidence la surestimation au calcul de la composante du tenseur d'orientation selon la direction principale du flux de matière injectée, par comparaison avec des mesures expérimentales [53, 64]. Un axe de progrès concernant la précision de la simulation d'injection est l'optimisation de ces coefficients empiriques à l'aide de corrélation calcul-essai, mais cette démarche, non développée pour ces travaux de thèse, est également difficile à mettre en œuvre de façon systématique dans un cadre industriel.

### 6.1.2 Transfert du champ tensoriel d'orientation

La qualité du maillage du calcul d'injection ne répond pas aux mêmes critères que celui d'un calcul mécanique. Dans le cas général, il est ainsi nécessaire de transférer les informations concernant la distribution d'orientation locale des fibres du premier maillage vers le second, au moyen d'une interpolation spatiale [1]. Nous avons déjà précisé (voir la section 5.1) que toute la distribution n'est pas calculée, mais seulement son second moment statistique, le tenseur d'orientation d'ordre 2 $\underline{\underline{a}}^{\psi}$.

Cette étape est réalisée à l'aide du logiciel DIGIMAT®, et plus particulièrement du module de *mapping*. Notons qu'à ce stade de développement du logiciel, seul un passage d'éléments 2D (resp. 3D) vers éléments 2D (resp. 3D) est autorisé. Par ailleurs, dans le cas d'éléments coques, il est possible de réduire le nombre de points d'interpolation dans l'épaisseur. Nous avons alors choisi 20 couches pour le calcul de simulation d'injection, afin d'optimiser la qualité des résultats, et nous avons utilisé 8 couches pour le calcul mécanique, de façon à atteindre un compromis entre la discrétisation des propriétés mécaniques sur l'épaisseur (effet cœur-peau) et la durée des calculs mécaniques. Dans le cas 3D, le tenseur d'orientation est simplement calculé par élément.

### 6.1.3 Simulation de la réponse mécanique

Les grandeurs mécaniques locales pour une structure soumise à un chargement extérieur sont déterminées au moyen d'un calcul par éléments finis. Une routine utilisateur UMAT (*User MATerial*) est développée en language FORTRAN pour ABAQUS®. Dans un premier temps, cette routine lit pour chaque point de Gauss le tenseur d'orientation local, ce qui permet d'assembler les tenseurs $\mathbb{C}^e$ et $\mathbb{P}$, comme exposé lors du chapitre 5. La routine consiste ensuite en la détermination de l'incrément de contrainte local $\Delta\underline{\underline{\sigma}}$, connaissant les grandeurs d'entrée du calcul que sont $\Delta\underline{\underline{\varepsilon}}$ et le pas de temps $\Delta t$. Ce problème nécessite la résolution des équations du comportement présentées au chapitre 3, à l'aide d'un schéma implicite, qui est détaillé en annexe B. La matrice tangente cohérente $\Delta\underline{\underline{\sigma}}/\Delta\underline{\underline{\varepsilon}}$ est calculée de façon à réduire la durée des calculs.

1. Notons qu'à l'avenir, il pourrait être intéressant de tenir compte d'informations complémentaires, telles que les champs de contraintes résiduelles conséquents au procédé d'injection, etc.

## 6.2 Éprouvettes de fatigue

Dans cette section, nous nous intéressons à l'application du modèle de comportement à des éprouvettes de fatigue, qui sont considérées comme des mini-structures. En effet, la simulation d'injection met en évidence un champ tensoriel $\underline{\underline{a}}^{\psi}$ fortement hétérogène, qui, ajouté à la présence d'accidents de forme (congés, entailles), explique la complexité des champs mécaniques. Les géométries des trois éprouvettes étudiées, dites « éprouvettes LBF », ainsi que les résultats des simulations d'injection, sont donnés en annexe A.3.

### 6.2.1 Conditions de la corrélation calculs-essais

#### a Protocole expérimental

Nous avons réalisé pour chacune des éprouvettes LBF des essais de traction monotone (pilotés en effort à 100 N/s) avec suivi des champs de déformation. Les éprouvettes sont conditionnées à $\mathcal{H} = 50$ %, et testées à température ambiante. Un mouchetis est déposé sur la face avant de l'éprouvette, et une caméra optique (modèle OSCAR F-810C avec un capteur CCD de 8 millions de pixels produit par AVT™) permet d'enregistrer les images nécessaires à la mesure des champs de déplacement par corrélation d'images. Ce post-traitement a été réalisé à l'aide du logiciel CORRELI® développé par le LMT[2] ; les champs de déformation à la surface de l'éprouvette ($\varepsilon_{11}$, $\varepsilon_{22}$, $\varepsilon_{12}$) sont calculés par dérivation spatiale du champ de déplacement $\underline{U}$.

De façon à certifier la mesure de la déformation par corrélation d'images, les essais ont été doublés, ce qui a permis de suivre la déformation dans la zone utile des éprouvettes (ou autour de l'entaille) à l'aide d'un extensomètre à couteaux. Les deux méthodes ont fourni des résultats cohérents.

#### b Simulations numériques réalisées

Ces essais ont été simulés par éléments finis, avec différentes lois de comportement :

- une loi élastique isotrope $\underline{\underline{\sigma}} = \mathbb{C}^{\text{iso}} : \underline{\underline{\sigma}}$ (faisant intervenir le module de Young $E_e = 10500$ MPa et le coefficient de Poisson $\nu = 0.34$, identifiés à partir des essais sur éprouvettes ISO527-2-1A au chapitre 3) ;
- une loi élastique anisotrope $\underline{\underline{\sigma}} = \mathbb{C}^{e} : \underline{\underline{\sigma}}$, où le tenseur de rigidité élastique est calculé selon un schéma d'homogénéisation en deux étapes, selon la procédure détaillée dans le chapitre 5, à partir du champ tensoriel $\underline{\underline{a}}^{\psi}$ issu du calcul d'injection ;
- la loi de comportement proposée au chapitre 3, avec les paramètres identifiés dans le cas de l'éprouvette ISO527-2-1A, mais sans prise en compte de la microstructure, c'est-à-dire $\mathbb{C}^{e} \equiv \mathbb{C}^{\text{iso}}$ et $\mathbb{P} \equiv \frac{3}{2}\mathbb{K}$ ;
- la loi de comportement proposée complète, tenant compte de l'influence de la distribution locale d'orientation des fibres sur les propriétés élastiques et viscoplastiques, avec les paramètres identifiés au chapitre 3 (coefficients viscoélastiques, viscoplastiques, d'adoucissement cyclique) et au chapitre 5 (coefficients élastiques de la matrice et des fibres, paramètre d'anisotropie $k$).

La première loi de comportement, très simple, est représentative de la procédure actuelle de dimensionnement chez PSA. La seconde permet de mettre en évidence l'influence de l'orientation des fibres sur les propriétés élastiques, et est représentative des calculs effectués chez d'autres industriels [53, 75, 112]. La troisième loi de comportement correspond à une démarche de dimensionnement fondée exclusivement sur les résultats de la campagne expérimentale sur éprouvette ISO527-2-1A,

2. Laboratoire de Mécanique et Technologie de l'ENS Cachan.

en ignorant le caractère anisotrope ou hétérogène du matériau, c'est-à-dire en ignorant l'influence du procédé sur la réponse mécanique. La comparaison des résultats du dernier modèle de comportement, qui correspond au modèle développé dans ces travaux de thèse, avec ceux issus des second et troisième modèles, permet d'évaluer si les améliorations (éventuelles) de la prédictivité du modèle de comportement sont dues à la prise en compte de la microstructure ou plutôt des composantes non linéaires du modèle de comportement.

### 6.2.2 Comparaison des réponses mécaniques à l'échelle de la zone utile

Dans un premier temps, nous nous intéressons à la déformation nominale en zone utile mesurée par extensomètre à couteaux. Lors des simulations numériques, un extensomètre virtuel est utilisé : nous calculons la différence de déplacement $\Delta U$ entre deux noeuds distants de 12.5 mm (voir la figure 6.1), et nous construisons ainsi un signal de déformation $\varepsilon = \Delta U / l_0$ comparable au signal expérimental.

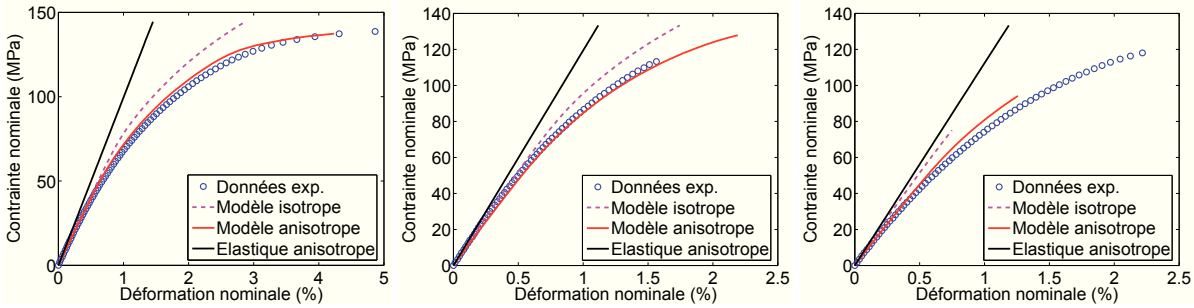
Nous présentons sur la figure 6.2 les résultats obtenus pour les éprouvettes LBF, pour les trois facteurs d'entaille [3]. Nous traçons la contrainte de traction nominale ($\sigma = F/S_0$ avec $F$ l'effort de traction et $S_0$ = 30×3 mm$^2$ la section nominale de l'éprouvette) fonction de la déformation nominale $\varepsilon$. Nous n'avons pas présenté le résultat de la simulation avec la loi de comportement élastique isotrope (loi n°1) puisqu'en raison de l'alignement assez important des fibres dans la zone utile, le modèle élastique anisotrope (loi n°2) renvoie des résultats très proches. Ceci explique également pourquoi le modèle non linéaire isotrope (loi n°3) présente une raideur initiale similaire au modèle non linéaire anisotrope (loi n°4).

En revanche, nous constatons qu'à partir d'une contrainte nominale de 30 MPa, la loi élastique sur-estime la raideur tangente : quelle que soit la géométrie d'éprouvette, la prise en compte de la non-linéarité de la réponse mécanique est primordiale de façon à ne pas sous-estimer les déformations. Remarquons au passage que l'amplitude de contrainte nominale pour des essais de fatigue sur l'éprouvette $K_t$ = 1 se situe typiquement entre 30 et 55 MPa (pour des durées de vie de quelques milliers à quelques millions de cycles – voir la seconde partie de ce manuscrit) : les niveaux de contrainte maximale pour des chargements à $R$=0 sont donc entre 60 et 110 MPa, c'est-à-dire dans une zone où un calcul élastique donne de très mauvais résultats.

La différence entre les lois n°3 et n°4 est relativement modérée, même si l'on s'aperçoit que la formulation du tenseur $\mathbb{P}$ tenant compte de la microstructure permet de mieux décrire la composante viscoplastique de la réponse mécanique. Mais il faut être conscient que l'écart serait beaucoup plus important dans des cas d'étude où les fibres seraient moins bien alignées avec l'axe du chargement. Au bilan, nous pouvons conclure à l'excellente prédictivité du modèle proposé, non linéaire et tenant compte de l'influence de la microstructure. Pour ces éprouvettes présentant des orientations de fibres globalement bien alignées avec l'axe du chargement, il s'avère que la prise en compte de la non-linéarité a davantage d'importance que la prise en compte du caractère anisotrope ; cependant, cette dernière est indispensable pour une bonne précision de la réponse numérique jusqu'à la rupture.

Pour conclure, nous pouvons remarquer qu'il est n'est pas possible de simuler le chargement mécanique sur l'éprouvette fortement entaillée ($K_t$ = 10) jusqu'à son terme. Cela s'explique par les concentrations de contraintes très importantes en fond d'entaille, qui empêchent la convergence du schéma numérique implicite. De façon à corriger ce défaut, un maillage encore plus fin pourrait être employé, et des méthodes numériques pour éviter une sur-prédiction de la déformation élastique (susceptible d'entraîner des valeurs trop élevées de $\mathcal{J}_{vp}$) pourraient être développées. Néanmoins, comme

3. Le facteur d'entaille $K_t$ est défini comme le rapport entre la contrainte en fond d'entaille et la contrainte nominale. Dans cette définition, $K_t$ – évalué à l'aide de relations issues de la mécanique de la rupture fragile pour des matériaux élastiques isotropes – ne dépend que de la géométrie de l'entaille et de la direction du chargement.




(a) Éprouvette $K_t = 1$ (b) Éprouvette $K_t = 2.5$ (c) Éprouvette $K_t = 10$

FIGURE 6.2 – Comparaison entre les mesures expérimentales (symboles) et les prédictions numériques (trait continu) sur des essais de traction monotone à 100 N/s sur les éprouvettes LBF.

le modèle proposé permet de couvrir l'étendue des sollicitations en fatigue, nous ne nous sommes pas étendus sur ce point.

### 6.2.3 Comparaison des champs de déformation

Nous présentons sur la figure 6.3 la comparaison des résultats de ces quatre simulations avec le champ expérimental obtenu par corrélation d'images. Nous analysons le champ de déformation axial $\varepsilon_{22}$ sur l'éprouvette LBF présentant un facteur d'entaille $K_t = 2.5$, pour un effort appliqué égal à 5500 N. Cet effort correspond à une contrainte nominale de 61 MPa : les phénomènes viscoplastiques commencent donc à être activés pour ce chargement [4].

La figure 6.4 correspond à la même comparaison, mais pour un effort plus important (9250 N, soit une contrainte nominale de 103 MPa) : les phénomènes non linéaires (viscoplasticité, adoucissement) sont clairement activés, comme nous pouvons le constater sur la réponse expérimentale de la figure 6.2b.

Le champ de déformation mesuré par corrélation d'images sur le pourtour de l'entaille circulaire (zone d'environ 1 mm de large) n'est pas exploitable, car la grille d'analyse ne coïncide pas avec les bords de l'éprouvette.

Ces comparaisons confirment l'analyse faite précédemment à partir des courbes $\sigma = \sigma(\varepsilon)$. Par ailleurs, nous montrons ici l'influence de la microstructure sur les champs de déformation : au niveau local (et non pas pour un résultat moyenné sur la longueur utile de l'extensomètre), nous constatons que la prise en compte du champ $\underline{\underline{a}}^{\psi}$ permet de rendre compte de la légère dissymétrie du champ de déformation. Même si la loi de comportement proposée ne permet pas de prédire exactement les niveaux de déformation importants mesurés dans les directions ±45°, nous constatons à l'aide de nos différentes simulations que ce résultat expérimental ne peut être expliqué que par un effet microstructural. Ces pics de déformation sont ainsi le résultat entre un flux d'effort qui reste important et une distribution d'orientation locale où les fibres ne sont pas du tout alignées avec l'axe de la sollicitation.

La comparaison entre les quatre simulations numériques montre une fois de plus tout l'intérêt de la loi de comportement proposée, qui est encore plus flagrant aux efforts importants. Il est ainsi indispensable de tenir compte de la non-linéarité de la réponse mécanique et de l'influence de la micro-

4. C'est d'autant plus vrai au bord de l'entaille circulaire, où la concentration de contrainte géométrique induit une valeur de $\sigma_{22}$ significativement plus élevée.

structure pour pouvoir réaliser une simulation numérique correctement corrélée avec les observations expérimentales.

### 6.2.4 Discussion

#### a Approfondissements envisagés

Les chargements étudiés sont des tractions monotones, pour lesquelles le protocole expérimental est relativement simple à mettre en place. Cependant, il aurait été intéressant de réaliser les mêmes comparaisons sur des chargements cycliques, de façon à mesurer les champs de déformation résiduelle par exemple. En outre, ce travail aurait permis d'alimenter la discussion concernant la nécessité de la prise en compte de la microstructure et des composantes non linéaires de la déformation pour des chargements cycliques, représentatifs des sollicitations en fatigue.

Par ailleurs, la comparaison des champs de déformation que nous avons effectuée est qualitative. Ces travaux gagneraient à être approfondis grâce au calcul d'une erreur construite sur la différence des champs tensoriels numériques et expérimentaux (par exemple : $e = \int_S \| \underline{\underline{\varepsilon}}^{\text{num}} - \underline{\underline{\varepsilon}}^{\text{exp}} \| \, \mathrm{d}\underline{x}$ après interpolation) qui permettrait une comparaison plus quantitative. De façon plus ambitieuse, on pourrait imaginer tirer profit de la connaissance du champ de déplacement sur la structure pour identifier les propriétés élastiques (voire non linéaires) locales au moyen d'une erreur en relation de comportement.

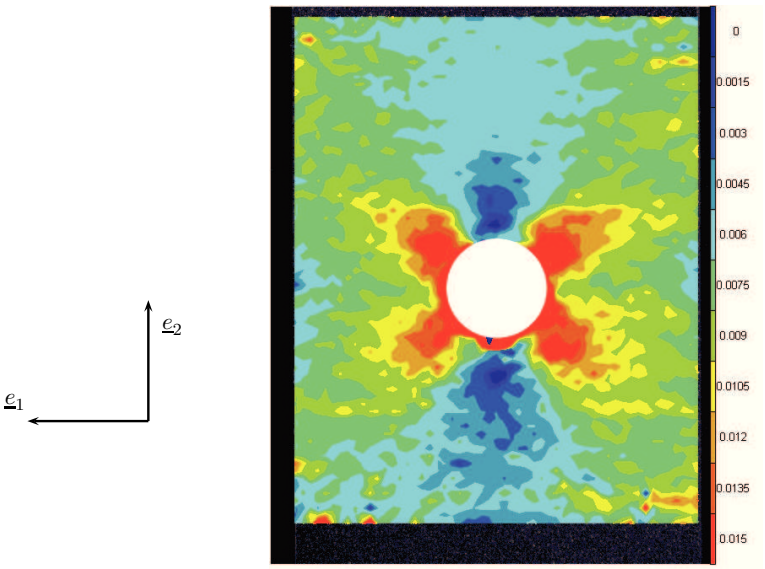
#### b Précision de la simulation d'injection

Nous avons mis en évidence le rôle important joué par la distribution d'orientation locale sur la réponse mécanique. Le champ tensoriel $\underline{\underline{a}}^{\psi}$ calculé par MOLDFLOW® est donc un paramètre d'entrée majeur, dont il convient d'éprouver la fiabilité. En effet, nous avons déjà évoqué la problématique concernant le choix des coefficients empiriques $C_I$ et $D_z$ [63], pour lesquels nous avons conservé les valeurs proposées par défaut par le logiciel : les prédictions du logiciel de simulation d'injection doivent donc être confrontées à des mesures expérimentales.

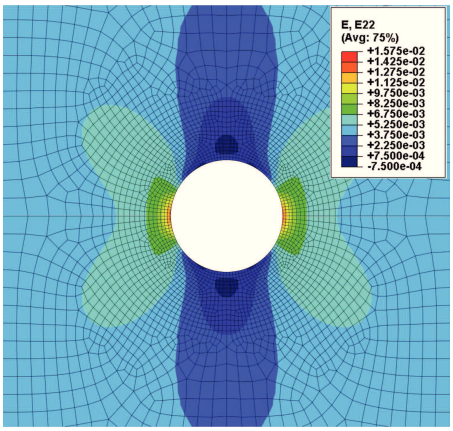
Une campagne d'observation expérimentale par microtomographie sur les éprouvettes LBF est en cours de réalisation. L'analyse des images permet de mesurer expérimentalement la distribution d'orientation 3D des fibres [23, 50]. L'objectif est double : d'une part nous serons en mesure d'évaluer la précision de la simulation d'injection, d'autre part nous disposerons de microstructures réelles, et non plus seulement numériques, à partir desquelles nous pourrons enrichir la discussion menée autour du choix d'une stratégie d'homogénéisation (chapitre 5). Malheureusement, les résultats de cette étude ne nous sont pas parvenus à temps pour figurer dans ce manuscrit. Indiquons cependant qu'un rapport d'études interne [33] ainsi que les travaux de Dray et al. [63], qui présentent tous deux des résultats encourageants concernant la prédictivité de MOLDFLOW® sur des géométries simples, permettent d'avoir une confiance raisonnable en nos données d'entrée.

#### c Bilan

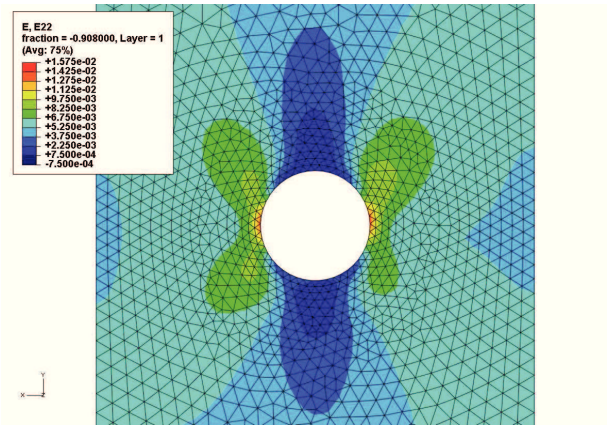
L'étude que nous avons présentée dans cette section sur les éprouvettes LBF a permis de valider la pertinence de la loi de comportement phénoménologique proposée. Les trois structures étudiées, malgré leur simplicité apparente, illustrent l'importance d'une modélisation fine, qui tient compte à la fois des mécanismes non linéaires ainsi que de la sensibilité au procédé de mise en forme par injection. Nous insistons sur l'importance de ces résultats obtenus dans des conditions permettant une bonne connaissance des conditions de chargement et de la microstructure locale.



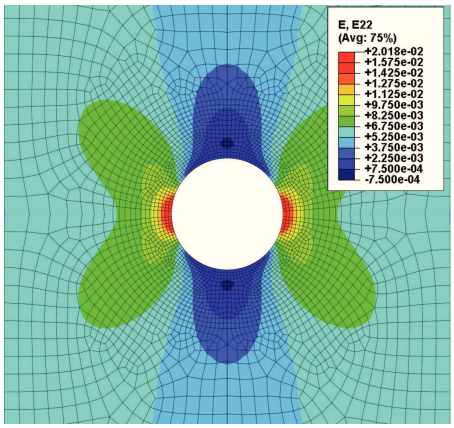

(a) Corrélation d'images



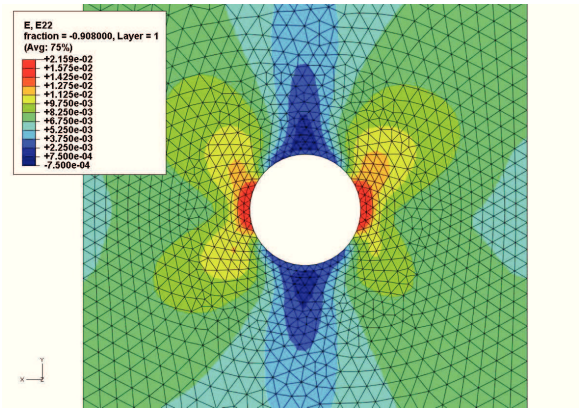

(b) Calcul avec loi élastique isotrope




(c) Calcul avec loi élastique anisotrope

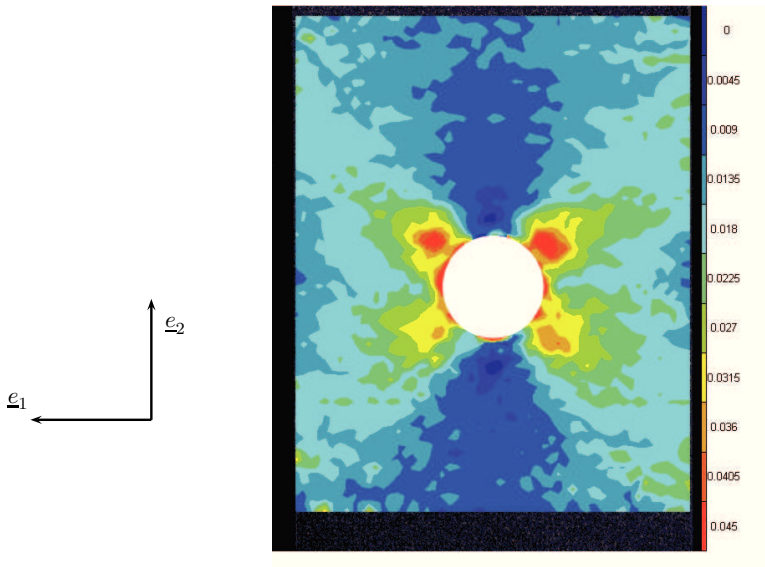



(d) Calcul avec loi proposée isotrope

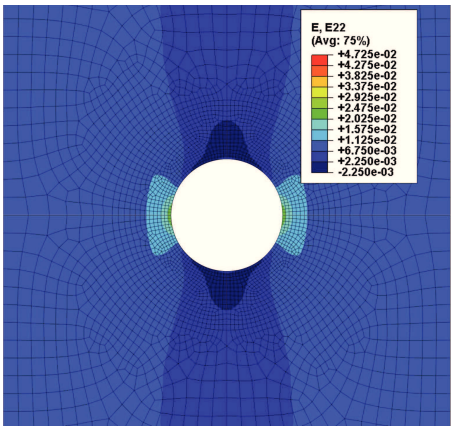



(e) Calcul avec loi proposée anisotrope

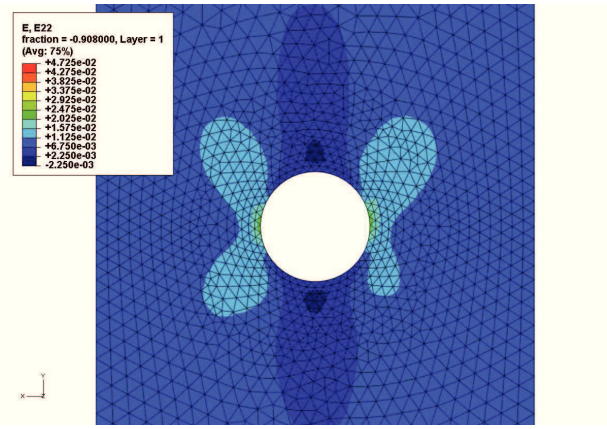
FIGURE 6.3 – Comparaison des champs de déformation uniaxiale $\varepsilon_{22}$ en surface pour un effort appliqué $F = 5.5$ kN. Les échelles de couleur sont identiques.



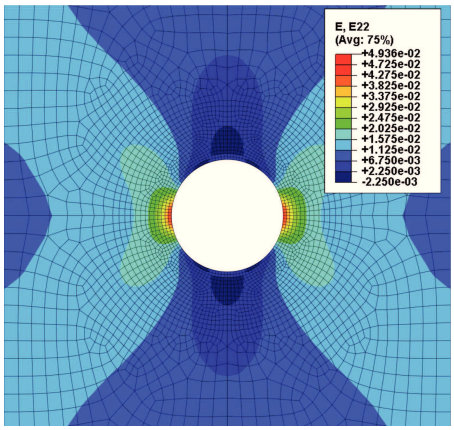

(a) Corrélation d'images



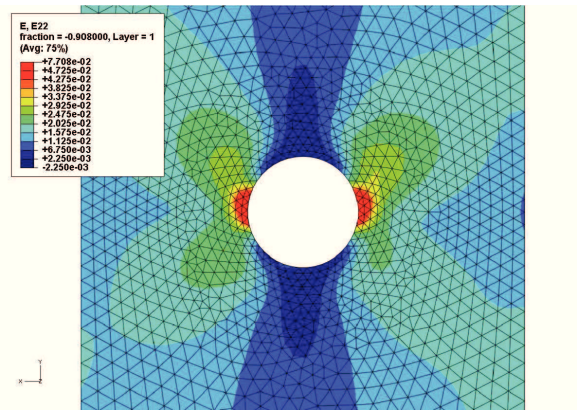

(b) Calcul avec loi élastique isotrope




(c) Calcul avec loi élastique anisotrope




(d) Calcul avec loi proposée isotrope




(e) Calcul avec loi proposée anisotrope

FIGURE 6.4 – Comparaison des champs de déformation uniaxiale $\varepsilon_{22}$ en surface pour un effort appliqué $F = 9.25$ kN. Les échelles de couleur sont identiques.

## 6.3 Répartiteur d'air à l'admission

Nous mettons en œuvre la démarche proposée pour déterminer le comportement cyclique du répartiteur d'air à l'admission. Plusieurs difficultés sont soulevées, en raison de la complexité géométrique de la structure d'une part, de la très forte hétérogénéité du champ d'orientation d'autre part, et également à cause des conditions de fonctionnement à température élevée qui impliquent une réponse mécanique locale fortement non linéaire. Ce cas d'étude représente ainsi une validation complète des travaux exposés dans la partie I de ce manuscrit.

### 6.3.1 Conditions de la corrélation calculs-essais

#### a Montage expérimental

Le répartiteur d'air que nous étudions est co-développé par PSA et Mann+Hummel™, un équipementier automobile dont la filiale française est située à Laval. Conçu pour la motorisation DW12B (moteur Diesel 2.2 litres), ce composant est formé de deux parties, une base (adaptée aux emplacements des soupapes d'admission sur la culasse) et un couvercle (raccordé au circuit d'admission d'air), qui sont injectées simultanément et assemblées par soudage à haute fréquence.

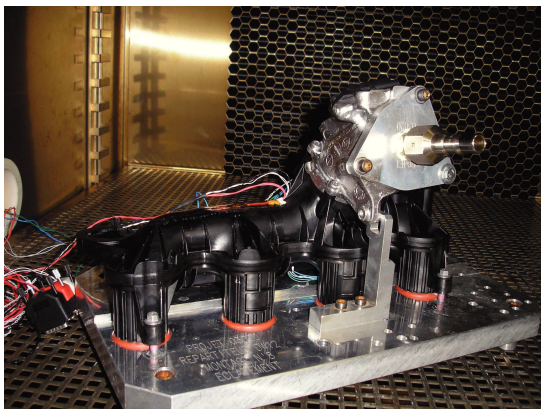


FIGURE 6.5 – Répartiteur d'air à l'admission dans l'enceinte thermique, monté sur le support en aluminium, et instrumenté avec deux jauges de déformation.

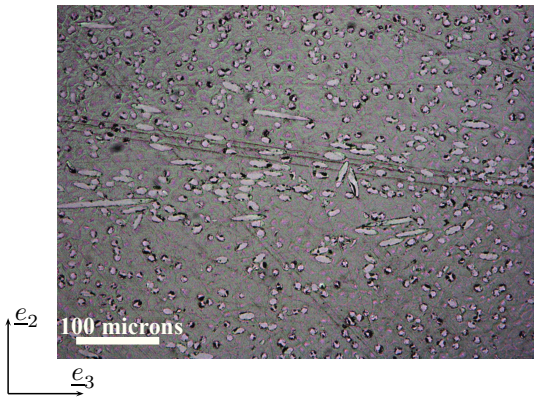



FIGURE 6.6 – Miscrocopie optique à partir d'un échantillon prélevé sur le répartiteur au niveau de la jauge inférieure, avec $\underline{e}_1$ normal au plan de coupe (zone d'observation de 650×500 microns).

Les essais sont réalisés en enceinte thermique à 110 °C ; le répartiteur est fixé sur un support en aluminium représentant la culasse et est soumis à une pression interne cyclique. Deux jauges de déformation (modèle KFG-1-120-D17-11 de KYOWA™, longueur utile 1 mm, déformation mesurée dans 3 directions : 0° et ±45°.) ont été collées de façon à mesurer la réponse mécanique locale. Le montage expérimental est illustré sur la figure 6.5. Des coupons ont été prélevés au niveau des jauges de déformation de façon à observer la distribution locale d'orientation des fibres. La figure 6.6 montre qualitativement que les fibres sont majoritairement orientées selon l'axe $\underline{e}_1$, c'est-à-dire la direction du flux d'injection. Cependant, une zone de cœur d'environ 200 microns (pour une épaisseur totale de 3 mm) où les fibres sont orientées de façon transverse est mise en évidence. Ces observations

confirment que sur une pièce complexe, la distribution d'orientation locale est anisotrope, tout comme nous l'avons déjà mis en évidence sur des plaques injectées.

Lors de la mise en place de l'essai, le répartiteur est tout d'abord fixé sur le support à l'aide de plusieurs vis. Une interface en aluminium, équipée d'une durite, est montée au niveau de l'arrivée d'air pour permettre la mise sous pression. Cette étape de bridage, effectuée à température ambiante, précède la montée en température à 110 ˚C. Une fois la consigne atteinte dans l'enceinte thermique, une attente de deux heures est respectée de façon à assurer la stabilisation thermique du montage. Nous considérons alors que l'ensemble du répartiteur est à 110 ˚C, avec une teneur en humidité négligeable (conditions DAM). Un chargement de pression cyclique est appliqué, avec un signal de type FRC [5], comme présenté sur la figure 6.7.

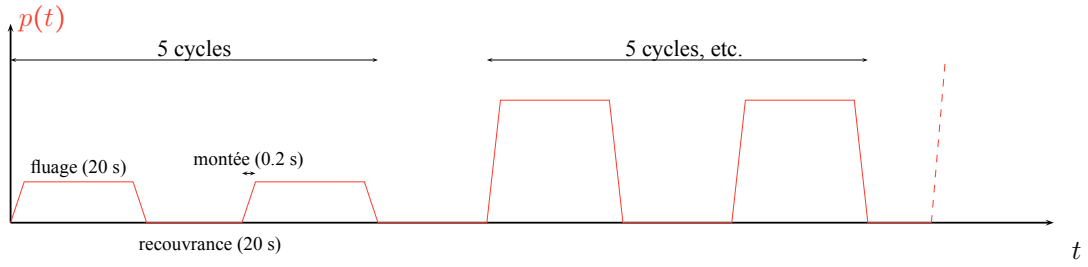



FIGURE 6.7 – Signal de pression interne appliqué au répartiteur d'air à l'admission. Les paliers de pression imposée s'échelonnent entre 0.37 et 3.7 bars.

### b Simulations numériques réalisées

De même que dans la section précédente, nous avons réalisé quatre simulations numériques différentes, en faisant varier la loi de comportement locale. Remarquons simplement que de façon à tenir compte d'un effet moyen de l'orientation des fibres dans le cas des lois isotropes (élastique ou non linéaire), le module de Young est multiplié par 0.65, selon une règle couramment utilisée en bureau d'études [6]. Ce facteur multiplicatif correspond donc à une hypothèse d'orientation des fibres diffuse en moyenne. Par ailleurs, le répartiteur est maillé à l'aide de 349292 éléments tétraédriques quadratiques, et 999855 nœuds. Nous illustrons sur la figure 6.8 le résultat de la prise en compte du champ d'orientation $\underline{\underline{a}}^{\psi}$ sur les propriétés élastiques, localement anisotropes et fortement hétérogènes à l'échelle de la structure. De façon à comparer la réponse des modèles numériques avec les mesures de déformation locale, nous avons identifié les emplacements des jauges de déformation, et les grandeurs mécaniques issues de la simulation sont alors extrapolées aux nœuds correspondants.

Nous ne présentons dans cette section que les résultats obtenus à partir des lois de comportement n°3 et n°4, c'est-à-dire obtenus avec le modèle non linéaire proposé, identifié à 110 ˚C, sans ou avec prise en compte explicite de l'influence de la microstructure sur les propriétés élastiques et viscoplastiques. Les lois de comportement élastiques (isotrope moyen ou anisotrope) permettent essentiellement d'illustrer l'augmentation des durées de calcul (voir la tableau 6.1) avec la complexité de la loi. Remarquons à ce stade que même la loi de comportement n°4 (modèle complet) met en jeu

5. Fluage-Recouvrance-Cyclique

6. Pour les éprouvettes LBF présentées en section 6.2, où l'orientation des fibres est assez forte dans la direction de traction, l'utilisation du module de Young directement identifié sur les éprouvettes ISO-527-2-1A est justifiée, mais ce n'est plus le cas sur une pièce aussi complexe que le répartiteur.

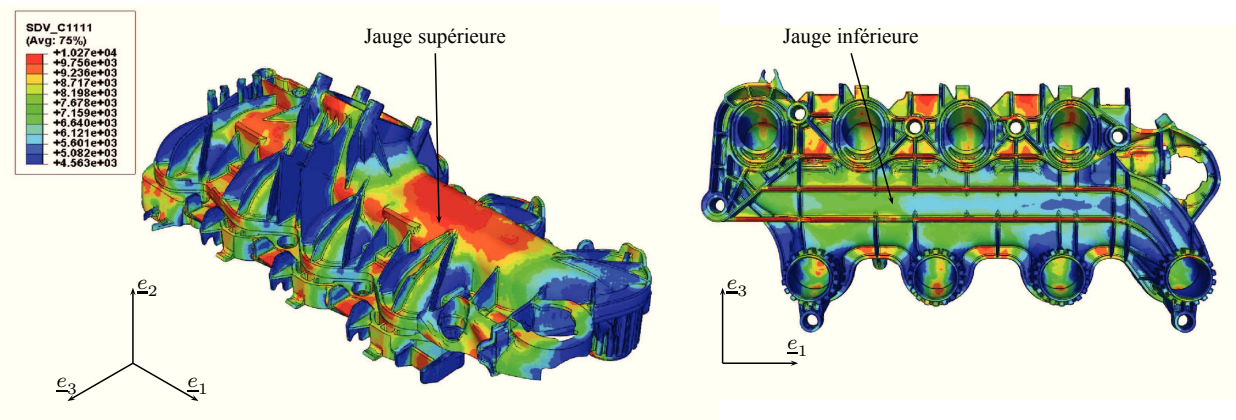



FIGURE 6.8 – Répartiteur d'air à l'admission (DW12B) : visualisation de l'hétérogénéité des propriétés mécaniques anisotropes (ici composante $C^e_{1111}$ en MPa) ainsi que de l'emplacement des zones de post-traitement correspondant aux jauges de déformation inférieure et supérieure.

des temps de calcul qui restent très inférieurs à la durée nécessaire à un calcul d'homogénéisation dans le cadre non linéaire (estimé à plus d'une semaine, i.e. de l'ordre de $10^6$ secondes pour le cas présenté – sans évoquer les difficultés de convergence).

| Numéro | Loi de comportement | Nombre d'incréments | Temps CPU (s) |
|---|---|---|---|
| 1 | Élastique isotrope | 1 | 808 |
| 2 | Élastique anisotrope | 1 | 917 |
| 3 | Modèle proposé isotrope « moyen » | 5 | 5210 |
| 4 | Modèle proposé anisotrope | 5 | 9727 |

TABLE 6.1 – Comparaison des durées de calcul sur le répartiteur : simulation d'un chargement monotone de mise sous pression interne à 3.7 bars à 110 ˚C en 0.4 secondes.

**Remarque : simplifications consenties**

La simulation exacte de l'essai réalisé sur le répartiteur est complexe. Notamment, les conditions aux limites lors de la phase de bridage ainsi que lors de la montée en température sont difficiles à modéliser de façon exacte : sur-contraintes locales engendrées par les conditions aux limites d'encastrement, dilatation thermique différentielle entre le support en aluminium et le répartiteur en PA66-GF35, anisotropie des coefficients de dilation thermique [64], contact avec frottements au niveau du support, etc. Faute de temps, nous avons choisi de simplifier la modélisation, et les conditions suivantes ont été appliquées :

- encastrement des nœuds en contact avec les quatre vis de l'interface vers l'arrivée d'air ;
- glissement plan-plan imposé au niveau des nœuds en contact avec le suppport en aluminium ;
- conditions de température homogène et stationnaire (110 ˚C) ;
- état initial naturel non déformé (non-simulation de la montée en température) ;
- liaison cinématique parfaite au niveau de la soudure entre la base et le couvercle du répartiteur ;
- pression interne imposée homogène sur la surface intérieure du répartiteur ;

– simulation d'un seul cycle de fluage/relaxation par niveau de pression interne (pour limiter la durée de calcul) ;
– surface extérieure du répartiteur libre de contraintes.

Si certaines de ces conditions semblent raisonnablement justifiées, d'autres prêtent davantage à caution. En particulier, l'hypothèse d'un état initial non déformé (et non contraint) sera sans doute la première à devoir être remise en question, en raison des signaux expérimentaux au niveau des jauges de déformation qui indiquent un mode de déformation global du répartiteur de type flexion autour de l'axe $\underline{e}_2$ lors de la mise en température, et qui est négligé lors des simulations numériques.

### 6.3.2 Résultats

#### a Champs de déformation

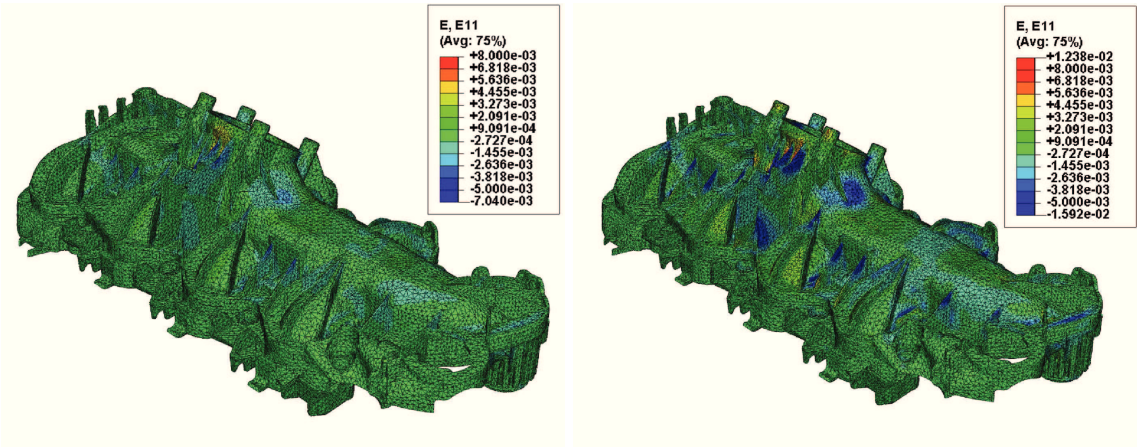
Nous présentons sur la figure 6.9 les champs de déformation calculés à l'issue du palier de fluage sur le cycle de pression interne à 3.7 bars, obtenus soit avec le modèle de comportement non linéaire isotrope « moyen », soit avec le modèle de comportement anisotrope qui prend en compte l'information de la microstructure. Nous montrons que la déformation selon l'axe $\underline{e}_1$, qui correspond à la direction moyenne du flux d'injection et selon laquelle les fibres sont majoritairement orientées, ne dépend pas au premier ordre de la prise en compte explicite de la distribution d'orientation dans la loi de comportement mécanique. En revanche, la déformation selon l'axe $\underline{e}_3$, c'est-à-dire globalement transverse aux fibres, y est fortement sensible. Nous pouvons ainsi conclure que si les champs de contrainte sont essentiellement pilotés par la géométrie de la structure et par le chargement appliqué (sauf au voisinage d'accidents de forme où les mécanismes viscoplastiques sont activés), les champs de déformation sont très influencés par la microstructure locale. Il apparaît donc qu'une simulation précise de la réponse mécanique du répartiteur requiert la description du lien procédé-comportement, ce qu'il nous faut maintenant confirmer à l'aide des mesures expérimentales.

#### b Corrélation calcul-essai au niveau des jauges de déformation

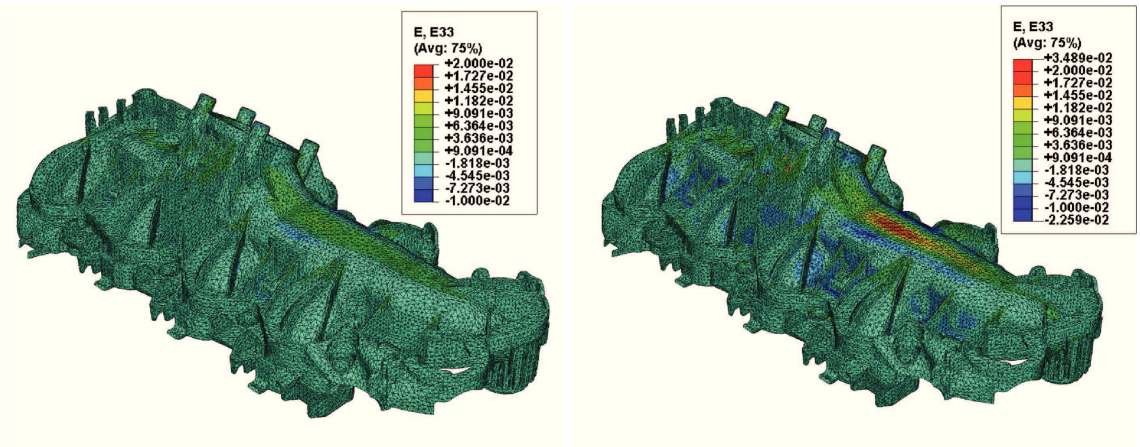
La figure 6.10 montre la comparaison des signaux de déformation prédits au niveau des jauges de déformation avec les signaux expérimentaux. Nous présentons uniquement, dans un souci de synthèse, les signaux de déformation principale maximale dans le plan des jauges de déformation. Nous avons tracé en ordonnée la valeur de la pression interne, puisque la contrainte locale ne peut être mesurée expérimentalement. Si nous constatons sur la jauge supérieure tout l'intérêt de prendre en compte l'influence de la microstructure de façon à réaliser une simulation prédictive, le cas de la jauge inférieure pose davantage question : la simulation isotrope est en effet parfaitement corrélée avec le signal expérimental, tandis que la simulation anisotrope conduit à une franche sur-estimation de la déformation.

Expliquons tout d'abord les raisons des différences entre les deux simulations : comme nous l'avons évoqué lors de l'analyse des champs de déformation, la prise en compte de l'orientation des fibres autorise des déformations plus importantes dans la direction transverse aux fibres, ce qui explique que la courbe « anisotrope » présente des valeurs supérieures de déformation principale maximale dans le plan. Remarquons également que les déformations sont faibles au niveau de la jauge supérieure (inférieures à 0.5 %), de telle sorte que les mécanismes non linéaires sont peu activés, tandis que des boucles d'hystérèse sont décrites au niveau de la jauge inférieure, où la contrainte locale est plus élevée.

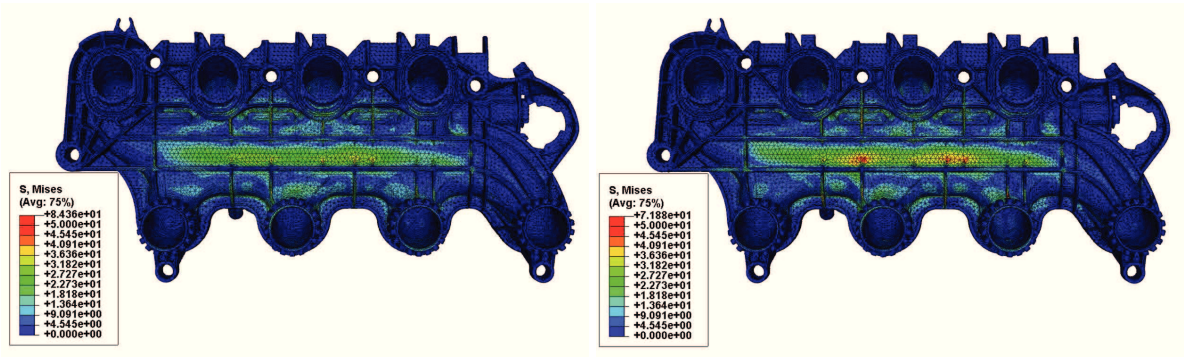
Modèle proposé isotrope « moyen » (loi n°3) Modèle proposé anisotrope (loi n°4)




(a) Face supérieure (couvercle), déformation « axiale » $\varepsilon_{11}$ (-)




(b) Face supérieure (couvercle), déformation « transverse » $\varepsilon_{33}$ (-)




(c) Face inférieure (base), contrainte équivalente de von Mises $\sigma_{\text{von Mises}}$ (MPa)

FIGURE 6.9 – Comparaison des champs de contrainte et déformation sur le répartiteur soumis à une pression interne de 3.7 bars, avec le modèle de comportement proposé. L'influence de l'orientation des fibres sur le comportement est respectivement moyennée (à gauche) ou explicitement prise en compte (à droite).

En ce qui concerne la jauge inférieure, l'écart entre la réponse du modèle anisotrope et le signal expérimental n'est pas dû aux composantes non linéaires de la déformation. En effet, la sur-estimation de la déformation intervient dès le début du chargement, et nous constatons que les modèles isotrope et anisotrope prédisent des amplitudes de fluage/recouvrance similaires (par ailleurs bien corrélées avec celles mesurées à l'essai). L'écart s'explique donc par une sur-évaluation de la composante élastique de la déformation. Deux explications peuvent alors être avancées :

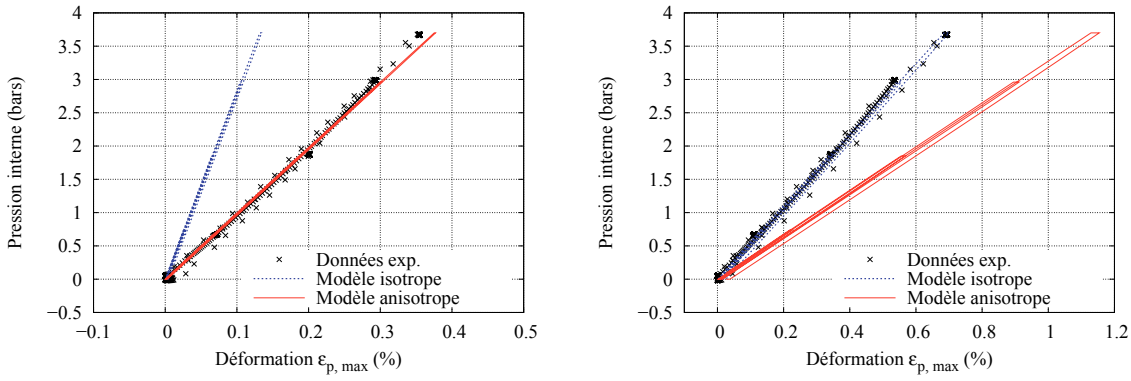
- la simulation d'injection n'est pas fiable dans cette partie de la pièce, ce qui conduit à une mauvaise estimation du tenseur d'orientation $\underline{\underline{a}}^{\psi}$ et donc à un tenseur élastique effectif $\mathbb{C}^e$ erroné. Cette justification qui met en cause la précision du calcul réalisé avec MOLDFLOW® doit cependant être étayée à l'aide de comparaisons quantitatives entre le tenseur $\underline{\underline{a}}^{\psi}$ prédit et une analyse de la microstructure locale (par microtomographie ou microscopie optique selon différents plans de coupe). Des observations qualitatives laissent en effet penser que la microstructure au niveau de la jauge inférieure est plus orientée selon l'axe $\underline{e}_1$ que ne le prédit MOLDFLOW® ;
- la non-prise en compte de l'état pré-déformé et la modélisation simplifiée des conditions aux limites peut également être à l'origine de l'écart constaté. En effet, la jauge inférieure est située dans une zone de la pièce qui se déforme plus lors de la mise en température, et qui est davantage susceptible d'être influencée par les conditions aux limites entre le répartiteur et le support en aluminium.

Enfin, un dernier point mérite d'être abordé : les signaux de déformation expérimentaux ne mettent pas en évidence de mécanisme de déformation non recouvrable. Il semble que la viscoplasticité ne soit donc pas activée au voisinage des jauges de déformation. Cependant, les jauges sont situées dans des zones sans accident de forme et une analyse des résultats des calculs numériques au niveau des nervures montre que ces chargements induisent une plastification locale non négligeable : une simulation élastique ou viscoélastique pourrait sembler suffisante au vu des résultats expérimentaux (pour les cas de chargement étudiés), mais ne permettrait pas de décrire la réponse mécanique dans les zones susceptibles de s'endommager. À ce sujet, la mesure du champ de température (par caméra infra-rouge) pourrait permettre de détecter les mécanismes dissipatifs locaux et serait donc intéressante pour vérifier l'emplacement des zones critiques prédites par la simulation numérique.

### 6.3.3 Discussion

La tentative de validation du modèle de comportement sur le répartiteur conduit donc à des résultats mitigés. En effet, si la corrélation calcul-essai sur la jauge supérieure est très satisfaisante, les résultats sur la jauge inférieure sont bien meilleurs avec le modèle non-linéaire isotrope moyen. Il est possible qu'un travail de modélisation approfondi permette d'améliorer la corrélation et donc de valider définitivement le modèle de comportement proposé ; il est également possible que des observations expérimentales mettent en défaut la précision de la simulation d'injection. Dans ce dernier cas, cela signifierait que si la connaissance de la microstructure est trop approximative, une approche isotrope moyenne est une solution dégradée qui peut s'avérer plus prédictive. Du point de vue industriel, le problème est alors difficile : comment valider de façon systématique la simulation d'injection ? Pourquoi tenir compte du lien procédé-comportement si une complexité accrue de la modélisation du comportement cyclique ne garantit pas de meilleurs résultats ?

Les bons résultats démontrés sur les éprouvettes de fatigue tendent à prouver que la loi de comportement non linéaire anisotrope développée au cours de la partie I est justifiée pour la description de la réponse mécanique cyclique du PA66-GF35. Néanmoins, il est vrai qu'à l'heure actuelle, plusieurs écueils empêchent de conclure à la validation de notre approche à l'échelle d'une pièce industrielle.




(a) Jauge face supérieure

(b) Jauge face inférieure

FIGURE 6.10 – Comparaison des signaux de déformation expérimentaux et numériques sur le répartiteur soumis à une pression interne cyclique, au niveau des jauges supérieure et inférieure. Sur le signal expérimental, seul le second cycle (sur cinq) est affiché ; la déformation présentée est la déformation principale maximale dans le plan $(\underline{e}_1, \underline{e}_3)$.

La chaîne de calcul numérique est mise en place, mais le passage du matériau à la structure complexe a mis en évidence des difficultés non résolues (pour le moment).

De façon à ne pas clore la partie I sur une note en demi-teinte, mettons l'accent sur un point positif : la démarche adoptée pour la modélisation du comportement rend possible la simulation de chargements cycliques sur des structures complexes, avec des durées de calcul compatibles avec une mise en place dans un cadre industriel. Nous avons donc démontré le potentiel de notre approche, qui permet, au moyen de méthodes de transition d'échelles simples et robustes, de décrire le lien entre le procédé et les caractéristiques mécaniques, et qui intègre de façon efficace la modélisation des composantes non linéaires de la déformation.

# Deuxième partie

# Tenue en fatigue

# Chapitre 7

# Étude bibliographique

## Sommaire


**7.1 Introduction au phénomène de fatigue . . . . . 144**
7.1.1 Amorçage et propagation . . . . . 144
7.1.2 Différents domaines de fatigue . . . . . 146
7.1.3 Revue de quelques critères de fatigue . . . . . 148
**7.2 Mécanismes d'endommagement des thermoplastiques renforcés en fibres courtes 152**
7.2.1 Les scénarii de propagation . . . . . 152
7.2.2 Étape d'amorçage . . . . . 157
7.2.3 Discussion . . . . . 159
**7.3 Paramètres influents sur la tenue en fatigue . . . . . 159**
7.3.1 Caractéristiques du matériau . . . . . 159
7.3.2 Conditions environnementales . . . . . 160
7.3.3 Microstructure . . . . . 160
7.3.4 Nature du chargement mécanique . . . . . 162
7.3.5 Effets d'entaille . . . . . 163
**7.4 Critères proposés dans la littérature pour les thermoplastiques chargés . . . . . 164**
7.4.1 Critères en contrainte . . . . . 164
7.4.2 Critère en densité d'énergie élastique . . . . . 166
7.4.3 Critère en déformation . . . . . 166
7.4.4 Bilan . . . . . 166


La seconde partie de ce manuscrit débute par une étude bibliographique consacrée à la fatigue. Nous nous appuyons sur les travaux concernant les matériaux métalliques pour définir ce phénomène physique ainsi que la notion d'approche en amorçage. Nous présentons succinctement les grandes familles de critères utilisés pour le dimensionnement à la fatigue des métaux en fonction des caractéristiques du régime stationnaire ; nous illustrons la difficulté de la transposition *a priori* d'un type de critère pour le PA66-GF35. Nous nous focalisons ensuite sur la fatigue des thermoplastiques renforcés en fibres de verre courtes, qui, à l'exception de ces dernières années, ne faisaient l'objet que de peu de travaux dans la littérature. Nous commençons par présenter les mécanismes d'endommagement en fatigue de ces matériaux, puis nous relevons les paramètres influents sur la durée de vie, et nous terminons en étudiant les quelques critères proposés dans la littérature pour leur dimensionnnement à la fatigue.

## 7.1 Introduction au phénomène de fatigue

Plusieurs modes de dégradation sont susceptibles d'intervenir au cours de la vie en service d'une structure mécanique appartenant à un véhicule automobile. On peut évoquer la rupture dynamique lors d'un choc, l'usure en présence de frottements, les agressions physico-chimiques de l'environnement (corrosion, vieillissement thermo-oxydatif...), et enfin l'endommagement sous chargement mécanique variable, déterministe ou aléatoire. Ce dernier cas de figure est couramment désigné sous le terme d'*endommagement par fatigue*, ou simplement *fatigue* [186]. Pour reprendre la définition proposée par Maitournam [132], la fatigue correspond ainsi *à l'ensemble des détériorations des propriétés mécaniques qui apparaissent dans les matériaux soumis à des contraintes ou à des déformations variables au cours du temps, dégradations conduisant le plus souvent à la fissuration voire à la rupture*.

Dans l'industrie automobile, la fatigue conditionne le dimensionnement de nombreux composants mécaniques. En effet, les chargements extérieurs, qu'ils soient mécaniques (pression pulsée, vibrations, efforts dus aux cycles du moteur, aux défauts de la route) ou thermiques (cycles marche/arrêt du moteur, flux de chaleur locaux provenant de la combustion) engendrent des contraintes et des déformations locales variables, qui, répétées un grand (voire très grand) nombre de fois, peuvent endommager une pièce.

### 7.1.1 Amorçage et propagation

On distingue généralement deux phénomènes dans l'étude de la fatigue, que ce soit pour les matériaux métalliques (les premiers à avoir fait l'objet de travaux dans ce domaine) ou pour les matériaux polymères et composites à matrice polymère [190] :

- l'amorçage de fissure, qui correspond à l'apparition d'une fissure détectable dans une structure ;
- la propagation d'une fissure déjà amorcée, qui conduit généralement à la ruine de la structure.

Lors d'un essai de fatigue, on définit trois phases successives, comme présenté sur la figure 7.1. La phase I correspond à un régime transitoire, qui s'étend sur un nombre de cycles généralement faible devant la durée de vie finale. Durant cette phase s'établissent l'équilibre thermique du matériau (entre les sources de chaleur – énergie dissipée – et les fuites vers l'extérieur), ainsi qu'une éventuelle accommodation mécanique.

La seconde phase correspond à l'existence d'un comportement mécanique stationnaire du point de vue macroscopique. La raideur (par exemple) n'y varie que très faiblement. On peut considérer que les microfissures sont confinées dans des volumes de taille suffisamment petite pour ne pas perturber la réponse mécanique macroscopique. On définit le nombre de cycles à amorçage $N_a$ lorsque la courbe s'éloigne de 5 ou 10 % (suivant les conventions) de son évolution stationnaire.

La troisième phase correspond à la propagation d'une ou plusieurs fissures jusqu'à la rupture de l'échantillon. Elle se traduit par une chute de la raideur, en général assez brutale.

Ces phases peuvent présenter des durées relatives variables suivant les matériaux et les cas de chargement. Par exemple, certains exemples montrent que le nombre de cycles avant amorçage est petit devant la durée de vie d'une structure : $N_a \ll N_r$. On considèrera alors que le dimensionnement doit obéir à des règles issues de la mécanique de la propagation de fissure. En revanche, il existe d'autres cas où l'amorçage n'est détecté que peu de temps avant la rupture finale de l'échantillon : $N_p = N_a - N_r \ll N_r$. Dans ce cas, on préfèrera, dans une démarche de dimensionnement en fatigue, utiliser des critères prédisant l'amorçage d'une fissure.

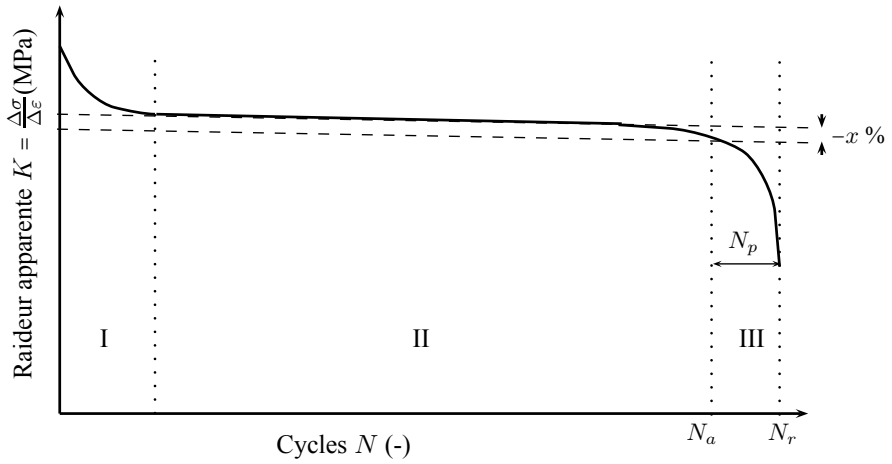



FIGURE 7.1 – Evolution classique de la raideur d'une éprouvette ou d'une structure lors d'un essai de fatigue. On définit le nombre de cycles à amorçage $N_a$, à rupture $N_r$ et la durée de propagation $N_p$.

### a Approche par amorçage

L'amorçage est difficile à définir physiquement puisque sa mesure dépend de l'échelle d'observation ; par ailleurs, un matériau vierge comporte quasi-systématiquement des défauts initiaux, notamment des porosités qui peuvent être assimilées à des micro-fissures. Il est donc difficile de mesurer précisément quand apparaît une fissure dans une structure. De plus, dans le cas des thermoplastiques semi-cristallins injectés, des études ont montré que les sites d'amorçage, très nombreux (ce qui est cohérent avec l'idée d'un endommagement diffus [136]), se trouvent généralement en zone sous-cutanée, ce qui complique encore la détection [101]. Pour simplifier l'approche, de nombreux auteurs considèrent qu'il n'y a pas d'amorçage de fissure tant qu'il n'y a pas de dégradation significative de la réponse mécanique de la structure.

L'avantage d'une approche par amorçage est qu'elle est relativement aisée à mettre en œuvre dans un cadre industriel. En effet, la démarche de dimensionnement se résume à la détermination de la réponse mécanique stationnaire, et une fois ce régime atteint, au calcul de différentes grandeurs physiques par cycle : amplitudes et valeurs moyennes de contraintes/déformations ou de leurs invariants, densité d'énergie dissipée, etc. Enfin, le régime étant macroscopiquement stationnaire, il est en général possible d'exhiber une corrélation entre une de ces grandeurs, notée $G_i$ et le nombre de cycles à amorçage, $N_a$.

### b Approche par propagation

L'étude de la propagation de fissure fait l'objet d'une littérature abondante avec des travaux expérimentaux sur éprouvettes préfissurées, sous le terme FCP (*Fatigue Crack Propagation*). On utilise généralement les outils de la mécanique linéaire de la rupture, comme les facteurs d'intensité de contrainte, notés $K_I$, $K_{II}$ et $K_{III}$. C'est très souvent le mode I d'ouverture qui est considéré et par conséquent seul le facteut $K_I$ (en MPa.$\sqrt{\text{m}}$) est pris en compte. Il est exprimé sous la forme $K_I = Y\sigma\sqrt{a}$ ; $\sigma$ est la contrainte nominale (c'est-à-dire calculée en l'absence de défaut) appliquée, $a$ la demi-longueur de fissure et $Y$ un facteur de forme dépendant de la géométrie du défaut et de la structure.

Dans le cas de chargements cycliques, on utilise $\Delta K$, la différence entre les valeurs maximale et

minimale de $K$ atteintes sur un cycle, comme grandeur gouvernant la propagation de fissure. Si $\Delta K$ est inférieur à un certain seuil $\Delta K_s$, on n'observe pas de propagation de fissure de fatigue. Dans le cas contraire, on peut généralement relier la vitesse de propagation de fissure (en mm/cycle) à $\Delta K$ par une loi puissance (loi de Paris-Erdogan ou une de ses dérivées), également vérifiée dans le cas de thermoplastiques renforcés [107, 163, 164, 199] :

$$\frac{da}{dN} = A\ \Delta K^m \tag{7.1}$$

dans le cas d'un régime stable. Lorsque la valeur de $\Delta K$ devient trop importante, la propagation est brutale et instable, et conduit à la ruine rapide de l'échantillon. Les matériaux dits fragiles ne présentent pas de phase de propagation stable. En revanche, les matériaux ductiles se caractérisent par une avancée plus lente du front de fissure.

Le dimensionnement en fatigue à l'aide d'une approche en propagation nécessite de tenir compte d'une évolution de la géométrie des composants au cours du chargement (avancée de la fissure) ; cette approche est donc coûteuse du point de vue numérique. De plus, pour des raisons de sécurité lors de la conception, les règles de dimensionnement dans l'industrie automobile préconisent généralement que l'amorçage d'une fissure équivaille à la ruine de la structure.

#### c Choix d'une approche

Les notions d'amorçage et de propagation sont intimement liées à celle d'échelle d'observation. En effet, mis à part le cas de matériaux très fragiles, l'amorçage d'une macro-fissure est généralement le résultat de la propagation d'une micro-fissure. Il est ainsi envisageable de calculer l'amorçage d'une fissure à l'aide d'une approche par propagation à une échelle inférieure. Néanmoins, une telle démarche nécessite une description microstructurale assez fine, à l'échelle fibre-matrice, ce qui est difficile dans le cas de pièces hétérogènes.

Plusieurs auteurs se sont intéressés au comportement en fatigue de thermoplastiques renforcés en fibres de verre courtes. Nous présentons sur les figures 7.2 et 7.3 des suivis de raideur apparente d'éprouvettes prélevées dans des plaques dans la direction du flux d'injection, et sollicitées en fatigue à température ambiante. Nous constatons que la durée de la phase de propagation correspond à moins de 5 % de la durée de vie : cette dernière est donc essentiellement contrôlée par l'amorçage d'une macro-fissure, la propagation étant très rapide [112]. C'est la raison pour laquelle nous choisissons, dans le cadre de cette étude, de nous intéresser aux approches de dimensionnement à l'amorçage, qui présentent également l'avantage d'être davantage compatibles avec l'environnement industriel.

### 7.1.2 Différents domaines de fatigue

#### a État de l'art concernant les matériaux métalliques

Dans la littérature consacrée aux matériaux métalliques, on distingue plusieurs domaines de fatigue en fonction du nombre de cycles à rupture. La *fatigue oligocyclique*, ou fatigue à faible nombre de cycles, concerne l'étude des chargements mécaniques entraînant la rupture d'une structure en un nombre de cycles $N_r$ pouvant varier de quelques centaines à quelques dizaines de milliers de cycles. Au-delà, on parle de *fatigue polycyclique*, ou fatigue à grand nombre de cycles, qui recouvre le domaine d'endurance limitée ($N_r$ varie de quelques dizaines de milliers à plusieurs millions de cycles) et celui de l'endurance illimitée, où les chargements sont suffisamment faibles pour que la structure ne fatigue « jamais » (au sens de l'ingénieur).

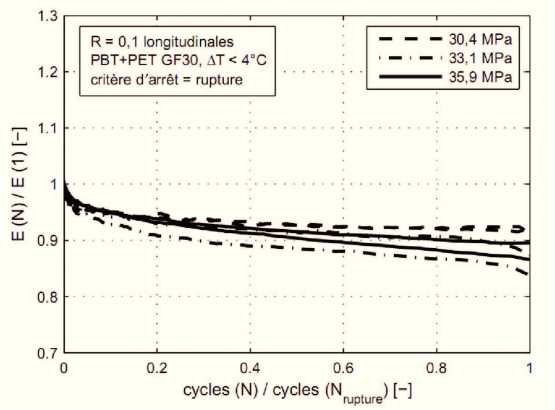



FIGURE 7.2 – Suivi de la raideur apparente au cours d'essai de fatigue sur des éprouvettes de traction en copolymère PBT+PET-GF30, d'après Klimkeit [112].

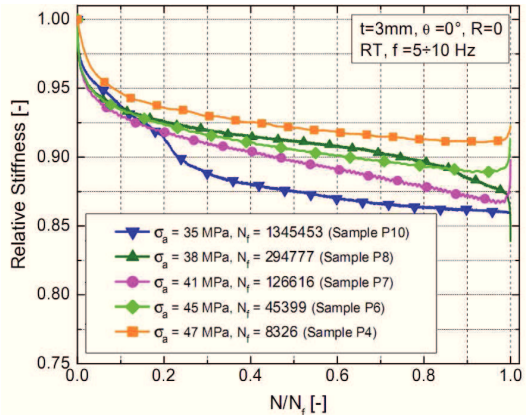


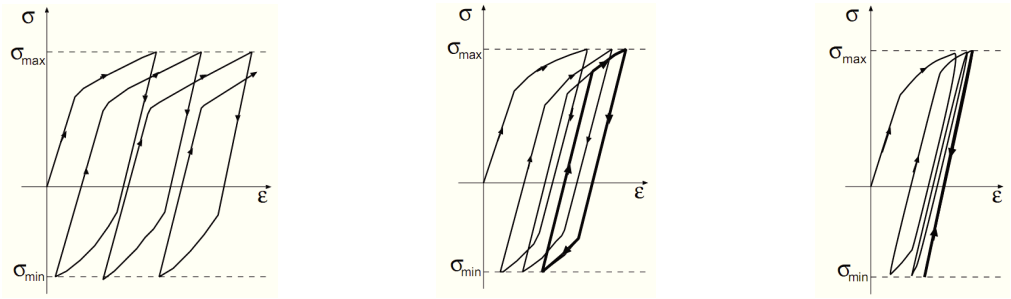

FIGURE 7.3 – Suivi de la raideur apparente au cours d'essai de fatigue sur des éprouvettes de traction en PA66-GF35 (état DAM, 23 °C), tiré des travaux de De Monte et al. [54].

Certains auteurs [49, 98, 134] proposent une classification moins subjective, qui repose sur les caractéristiques de l'état asymptotique [4, 104] de la réponse mécanique. Tout d'abord, si l'état asymptotique n'est pas cyclique en déformation et en variables internes, on parle de « rochet » : la rupture intervient alors généralement au bout d'un faible nombre de cycles (de quelques unités à quelques centaines) [1]. Les structures dans l'industrie automobile sont généralement dimensionnées de façon à éviter ce phénomène. On distinguera donc pour l'essentiel le cas d'un comportement asymptotique cyclique dissipatif à l'échelle macroscopique, dit « accommodé », et le cas d'un comportement asymptotique non dissipatif à l'échelle macroscopique, dit « adapté ». La fatigue oligocyclique recouvre l'étude des structures présentant une accommodation, tandis que la fatigue polycyclique est associée à l'hypothèse d'adaptation. Dans ce dernier cas, il est possible que des mécanismes irréversibles soient cependant activés à l'échelle de la microstructure et soient responsables d'une rupture intervenant en un grand nombre de cycles (endurance limitée), tandis que l'hypothèse d'adaptation à toutes les échelles se traduit par une endurance illimitée.

### b Cas des thermoplastiques renforcés en fibres de verre courtes

Les figures 7.5 et 7.6 présentent des exemples de comportement cyclique de thermoplastiques renforcés en fibres de verre courtes. Nous constatons plusieurs différences avec la classification usuelle concernant les matériaux métalliques. En effet, il est possible que le comportement asymptotique soit dissipatif, et que les durées de vie soient malgré tout importantes : ce phénomène s'explique par la viscoélasticité (à court terme) des composites à matrice thermoplastique, qui est active quelle que soit l'amplitude du chargement appliqué. Par ailleurs, il est également possible que la réponse asymptotique ne soit pas macroscopiquement stabilisée, sans pour autant que l'on puisse parler de rochet car les durées de vie sont importantes. Ce type de réponse est généralement observé dans le cas de chargement de fatigue à contrainte moyenne positive : une réponse de fluage (viscoélasticité à long

1. Les approches de dimensionnement ne peuvent alors pas être fondées sur la détermination d'un régime stationnaire ; ces cas de figure doivent plutôt être traités à l'aide de méthodes par endommagement continu, où une variable interne $d$ croît explicitement au cours du chargement, modifiant les propriétés macroscopiques et entraînant la rupture du matériau lorsqu'elle atteint une valeur limite.




(a) Rochet (b) Accommodation (c) Adaptation

FIGURE 7.4 – Classification des comportements asymptotiques usuels pour les matériaux métalliques sous chargement cyclique [132].

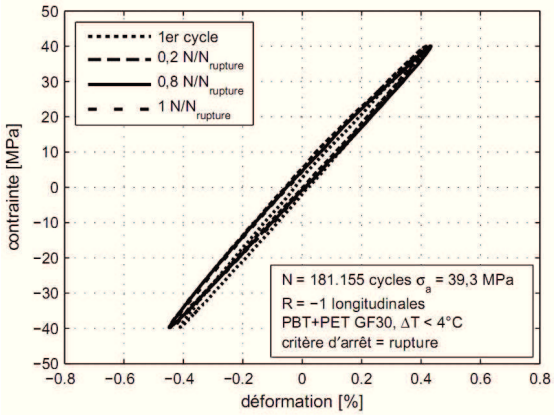



FIGURE 7.5 – Suivi des boucles d'hystérèse au cours d'un essai de fatigue de traction alternée sur éprouvette en PBT+PET-GF30, d'après Klimkeit [112].

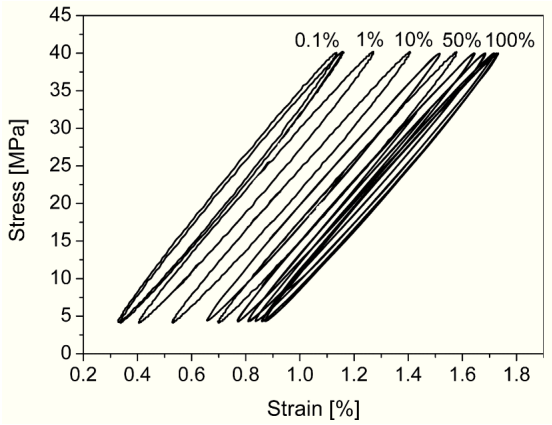



FIGURE 7.6 – Suivi des boucles d'hystérèse au cours d'un essai de fatigue de traction répétée sur éprouvette en PA66-GF35 ($\mathcal{H}$=50%, $T$=23 °C), d'après Bernasconi et al. [24].

terme) se superpose à la réponse cyclique ; nous y reviendrons dans la suite de ce chapitre.

Nous constatons donc que les approches classiques développées pour la fatigue des matériaux métalliques depuis de nombreuses années ne sont pas exactement transposables aux matériaux auxquels nous nous intéressons. C'est la raison pour laquelle, dans la suite de ce manuscrit, nous envisagerons indifféremment l'application de différents critères de fatigue réservés usuellement aux domaines oligo- ou polycycliques.

### 7.1.3 Revue de quelques critères de fatigue

Les critères de fatigue que nous présentons sont tous issus de la démarche générale adoptée pour les approches de dimensionnement à l'amorçage : une relation empirique est proposée entre la durée de vie $N_a$ et une ou plusieurs grandeurs physiques $G_i$, calculée(s) sur un cycle en régime stationnaire. Nous appelons dans la suite « cycle stabilisé » un cycle de chargement en régime stationnaire ; la notion de stabilisation est relative, il faut en effet comprendre que les cinétiques d'évolution des variables d'état du matériau (endommagement en fatigue, cumul de déformation viscoélastique ou

viscoplastique, adoucissement, etc) ont des temps caractéristiques grands devant la période du chargement. Si ces critères ont généralement été développés pour les matériaux métalliques, certains ont été introduits plus spécifiquement pour les matériaux composites (à fibres longues) ou encore pour les matériaux élastomères.

### a Critères polycycliques

**Critères en amplitude de cisaillement**

Nous pouvons formuler de façon générale un critère en amplitude de cisaillement sous la forme $\log N_a = f(J_2^a)$. Le choix d'une fonction affine permet d'écrire :

$$\log N_a = \frac{\sigma_0 - J_2^a(\underline{\underline{\sigma}})}{b} \tag{7.2}$$

$\sigma_0$ et $b$ sont les paramètres du critère. $J_2(\underline{\underline{\sigma}})$ est un scalaire mesurant l'intensité du cisaillement selon la norme de von Mises (isotrope) ou bien selon la norme anisotrope de type Hill (présentée en section 5.3). Son amplitude est définie avec la norme de von Mises comme le rayon de la plus petite hypersphère circonscrite au trajet de chargement dans l'espace des contraintes déviatoriques (de dimension 5) [158] :

$$J_{2,\mathrm{vonMises}}^a(\underline{\underline{\sigma}}) = \min_{\underline{\underline{s}}_1} \max_{t\in[0,T_{\mathrm{cycle}}]} \left[\sqrt{\frac{3}{2}\left(\underline{\underline{s}}_1 - \underline{\underline{s}}(t)\right) : \left(\underline{\underline{s}}_1 - \underline{\underline{s}}(t)\right)}\right] \tag{7.3}$$

Dans le cas de la norme de Hill (également déviatorique), on écrira :

$$J_{2,\mathrm{Hill}}^a(\underline{\underline{\sigma}}) = \min_{\underline{\underline{s}}_1} \max_{t\in[0,T_{\mathrm{cycle}}]} \left[\sqrt{\left(\underline{\underline{s}}_1 - \underline{\underline{s}}(t)\right) : \mathbb{P} : \left(\underline{\underline{s}}_1 - \underline{\underline{s}}(t)\right)}\right] \tag{7.4}$$

**Critères fondés sur l'amplitude de cisaillement et la pression hydrostatique**

Ces critères ont été initialement formulés de façon à proposer l'expression d'une limite d'endurance dans le cas de chargements multiaxiaux. Leur formulation provient de l'observation (faite sur de nombreux métaux) selon laquelle la pression hydrostatique a un effet négatif sur la tenue en fatigue, et particulièrement sur la limite d'endurance. Il est possible de proposer une généralisation de ces critères de façon à estimer le nombre de cycles à amorçage dans le cas de chargements (polycycliques) supérieurs à la limite d'endurance [52, 71]. Le critère de Crossland [2] s'écrit selon :

$$\log N_a = \frac{\sigma_0 - \left(J_2^a(\underline{\underline{\sigma}}) + \alpha P_{\max}\right)}{b} \tag{7.5}$$

$P_{\max}$ est le maximum de la pression hydrostatique observé sur le cycle stabilisé. Le critère de Sines est légèrement différent, puisqu'il n'est pas construit à partir du maximum mais plutôt à partir de la valeur moyenne de la pression hydrostatique :

$$\log N_a = \frac{\sigma_0 - \left(J_2^a(\underline{\underline{\sigma}}) + \alpha P_{\mathrm{moy}}\right)}{b} \tag{7.6}$$

2. Plus rigoureusement, il faudrait plutôt l'appeler « critère de fatigue polycyclique inspiré du critère de Crossland » ; nous confondrons les deux dénominations dans la suite de ces travaux, dans un souci de concision (de même que pour les critères de Sines ou de Dang Van).

Le critère de Dang Van recherche explicitement la direction matérielle $\underline{n}$ qui est soumise à la plus forte combinaison de cisaillement $\tau$ et de pression hydrostatique au cours du cycle :

$$\log N_a = \frac{\sigma_0 - \max_{\underline{n}} \max_t \left[\tau(\underline{n}, t) + \alpha P(t)\right]}{b} \tag{7.7}$$

Ces trois critères reposent sur des justifications physiques similaires de l'endommagement en fatigue ; ils ne sont cependant pas nécessairement corrélés de la même façon à la durée de vie $N_a$ pour des bases expérimentales faisant intervenir des trajets de chargement variés.

**Critères en déformation/contrainte principale**

Ces critères ont été davantage étudiés en ce qui concerne les matériaux élastomères [173]. Le critère en contrainte principale maximale est formulé à partir de l'amplitude de la plus grande valeur propre du tenseur des contraintes $\sigma_{\text{p, max}}$ sur le cycle stabilisé. Nous pouvons le formuler de la façon suivante :

$$\log N_a = \frac{\sigma_0 - \left(\sigma^a_{\text{p, max}}\right)}{b} \tag{7.8}$$

De façon similaire, il est possible de proposer un critère en amplitude de déformation principale maximale :

$$\log N_a = \frac{\varepsilon_0 - \left(\varepsilon^a_{\text{p, max}}\right)}{b} \tag{7.9}$$

**Critère de Tsai-Hill**

Le critère de Tsai-Hill est initialement un critère de dimensionnement à la rupture statique de matériaux anisotropes (généralement des composites stratifiés) : à partir de l'identification des contraintes à rupture mesurées sous différents chargements élémentaires (généralement traction dans des directions perpendiculaires et cisaillement), notées respectivement $S_1$, $S_2$ et $T$ dans le cas de contraintes planes, la rupture statique sous un chargement quelconque est alors prédite lorsque la fonction critère $F$ atteint la valeur 1, avec [191] :

$$F = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{11}}{S_1}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{22}}{S_2}\right)^2 - \frac{\sigma_{11}\sigma_{22}}{S_1^2} + \left(\frac{\sigma_{12}}{T}\right)^2}$$

Ce critère peut être généralisé à l'étude de la fatigue [24, 102]. Prenons le cas d'un matériau pour lequel un critère de fatigue en contrainte a été identifié pour plusieurs chargements plans (par exemple au moyen de l'équation 7.8). Il est alors possible de proposer un critère de fatigue pour un chargement de direction quelconque. L'amorçage $N_a$ est alors prédit lorsque la fonction $F$ prend la valeur 1, avec cette fois :

$$F = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{11}}{S_1 + b_1 \cdot \log N_a}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{22}}{S_2 + b_2 \cdot \log N_a}\right)^2 - \frac{\sigma_{11}\sigma_{22}}{\left(S_1 + b_1 \cdot \log N_a\right)^2} + \left(\frac{\sigma_{12}}{T + c \cdot \log N_a}\right)^2} \tag{7.10}$$

où les couples de paramètres $(S_1, b_1)$, $(S_2, b_2)$, $(T, c)$ sont identifiés pour des essais de fatigue en traction dans les directions $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$ et en cisaillement plan [3].

3. Les équations proposées sont écrites dans le cas de chargements plans, il est bien entendu possible de les généraliser au cas de chargements 3D, au prix d'expressions beaucoup plus lourdes.

### b Critères oligocycliques

**Modèle de Manson-Coffin**

À l'origine, le critère de Manson-Coffin a été proposé pour prédire la durée de vie en régime oligocyclique de matériaux métalliques lors d'essais de fatigue uniaxiaux [46, 137] ; il s'écrit :

$$\varepsilon_{vp}^{a} \cdot N_a^b = C \tag{7.11}$$

où $\varepsilon_{vp}^{a} \equiv \Delta\varepsilon_p/2$ est l'amplitude de la déformation (visco)plastique dans la direction de chargement lors d'un cycle stabilisé. $b$ et $C$ sont les deux paramètres du modèle, qui se représente sous la forme d'une droite dans un digramme $\log \varepsilon_{vp}^{a}$-$\log N_a$. Une généralisation possible aux cas de chargements multiaxiaux peut être formulée en considérant le rayon de la plus petite hypersphère circonscrite au trajet de chargement dans l'espace des déformations plastiques (de dimension 5) [132] :

$$\varepsilon_{vp}^{a} = \min_{\underline{\underline{e}}_1} \max_{t\in[0,T_{\text{cycle}}]} \left[ \sqrt{\frac{2}{3}\left(\underline{\underline{e}}_1 - \underline{\underline{\varepsilon}}_{vp}(t)\right) : \left(\underline{\underline{e}}_1 - \underline{\underline{\varepsilon}}_{vp}(t)\right)} \right] \tag{7.12}$$

**Critères énergétiques**

Morrow [147] a suggéré une corrélation entre la durée de vie en fatigue (à l'amorçage) et l'énergie dissipée par cycle en régime stationnaire. Ce critère est écrit à l'aide d'une grandeur physique scalaire, ce qui facilite son application aux chargements multiaxiaux. Il a été employé avec succès par Skelton [182] pour prédire la durée de vie d'alliages métalliques soumis à des chargements oligocycliques à haute température, et également par Charkaluk et Constantinescu [40] pour le dimensionnement à la fatigue thermo-mécanique de la fonte d'aluminium sur des applications automobiles. Ce critère est formulé selon :

$$\Delta W_{\text{diss}} \cdot N_a^b = C \tag{7.13}$$

$\Delta W$ est l'énergie dissipée par mécanismes (visco)plastiques durant un cycle. Puisque la déformation élastique est réversible, cette quantité se calcule au moyen de l'équation suivante :

$$\Delta W_{\text{diss}} \equiv \int_{\text{cycle}} \underline{\underline{\sigma}}(t) : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}_{vp}(t)\, \mathrm{d}t = \int_{\text{cycle}} \underline{\underline{\sigma}} : \mathrm{d}\underline{\underline{\varepsilon}} \tag{7.14}$$

Amiable et al. [5] ont proposé une extension de ce critère de façon à mieux décrire les effets de rapport de charge. Pour modéliser le fait que les micro-fissures ouvertes sous l'effet d'une pression hydrostatique positive sont des sites d'amorçage potentiel plus critiques que les fissures fermées, les auteurs ont ajouté une dépendance à la pression hydrostatique maximale par cycle selon :

$$(\Delta W_{\text{diss}} + \alpha P_{\max}) \cdot N_a^b = C \tag{7.15}$$

Dans le cas d'une modélisation du comportement comme celle que nous avons proposée en partie I, il est possible de séparer l'énergie dissipée en différentes contributions : viscoplasticité, viscoélasticité, adoucissement. En effet, il est possible de réécrire l'équation 3.25 page 74 après intégration sur un cycle selon :

$$\begin{aligned} \Delta W_{\text{diss}} &= \int_{\text{cycle}} \mathscr{D}_1(t)\, \mathrm{d}t \\ &= \int_{\text{cycle}} \Big[ \underbrace{\underline{\underline{\mathcal{A}}}_{v1} : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}_{v1}(t) + \underline{\underline{\mathcal{A}}}_{v2} : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}_{v2}(t)}_{\text{dissipation par viscoélasticité}} + \underbrace{\underline{\underline{\mathcal{A}}}_{vp} : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}_{vp}(t) + \underline{\underline{X}} : \dot{\underline{\underline{\alpha}}}(t)}_{\text{viscoplasticité}} + \underbrace{\mathcal{A}_\beta \cdot \dot{\beta}(t)}_{\text{adoucissement}} \Big]\, \mathrm{d}t \\ &\equiv \Delta W_{ve} + \Delta W_{vp} + \Delta W_s \end{aligned} \tag{7.16}$$

L'énergie dissipée par adoucissement est négligeable devant les deux autres contributions sur un cycle stabilisé. Une alternative au critère énergétique, appelée critère énergétique modifié, est une combinaison linéaire des énergies dissipées selon les mécanismes viscoélastiques et viscoplastiques, formulée selon l'équation suivante :

$$(\Delta W_{vp} + \alpha \Delta W_{ve}) \cdot N_a^b = C \tag{7.17}$$

Dans le cas limite $\alpha = 0$, l'énergie dissipée par viscoplasticité est la seule grandeur physique corrélée à l'endommagement par fatigue. À l'inverse, $\alpha = 1$ correspond au modèle énergétique classique, tandis que $\alpha \to +\infty$ signifie que ce sont les mécanismes viscoélastiques qui pilotent l'amorçage de fissure en fatigue.

## 7.2 Mécanismes d'endommagement des thermoplastiques renforcés en fibres courtes

Dans cette section, nous nous intéressons aux mécanismes d'endommagement en fatigue des thermoplastiques renforcés en fibres de verre courtes. Les premières études, essentiellement fondées sur l'analyse du faciès de rupture, détaillent les scenarii présumés de propagation. Des travaux plus récents se focalisent sur les sites potentiels d'amorçage dans la microstructure.

### 7.2.1 Les scénarii de propagation

#### a Techniques expérimentales

Les micromécanismes d'endommagement susceptibles d'intervenir lors de la sollicitation mécanique d'un matériau composite renforcé en fibres courtes sont très nombreux : rupture de fibres, décohésion fibre/matrice et arrachement de fibres, cisaillement de la matrice en zone interfaciale et fissuration, élongation de la matrice, cavitation et coalescence des cavités, microfissuration par crazing et coalescence, rupture matricielle, etc [121]. Il est alors possible d'élaborer de nombreux scenarii d'endommagement et de rupture des matériaux composites, qui doivent être justifiés par des observations expérimentales.

De nombreux auteurs procèdent par analyse fractographique au MEB[4] des faciès de rupture. L'analyse qualitative ou (plus rarement) quantitative des déformations locales (au niveau des fibres et de la matrice) ainsi que le suivi du trajet de fissuration permettent de comprendre les mécanismes d'endommagement [97, 121, 136]. Cette approche peut être complétée par des ruptures cryogéniques d'échantillons (avant que la fissure de fatigue n'ait rompu l'échantillon), afin d'observer la microstructure dans son état initial ou au cours de la durée de vie [97, 112].

De façon à suivre l'endommagement au cours du chargement cyclique, d'autres techniques peuvent être employées. Noda et al. [150] proposent de réaliser des coupes à différents stades de la durée de vie des pièces. Une observation en microscopie optique peut alors suffire à localiser les sites d'amorçage des microfissures dans le volume et leurs modes de propagation. Klimkeit et al. [113] ont mis en œuvre la technique des répliques : des empreintes réalisées régulièrement au cours du chargement permettent de détecter l'amorçage d'une macro-fissure ainsi que de suivre son évolution. Cette méthode présente l'avantage d'être non-destructive, néanmoins, elle ne peut pas permettre de détecter l'apparition de fissures non surfaciques.

4. Microscope Électronique à Balayage, *Scanning Electronic Microscopy* (SEM) en anglais.

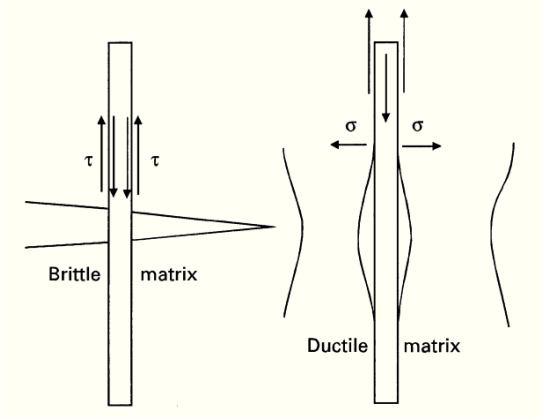



FIGURE 7.7 – Illustration de la différence de chargement local à l'interface fibre/matrice en fonction du caractère fragile ou ductile de la matrice, extrait de [97].

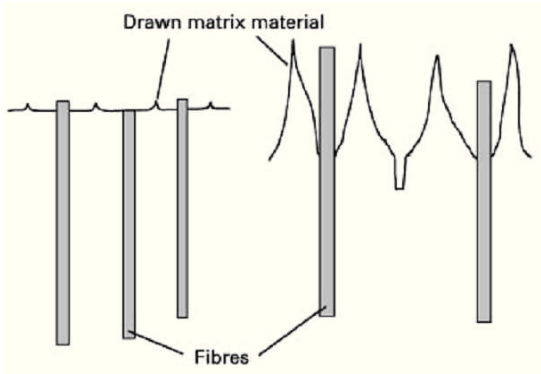



FIGURE 7.8 – Différences entre les faciès de rupture en fatigue dans le cas d'une matrice DAM ou conditionnée à $\mathcal{H}$=50 % (tiré de [97]).

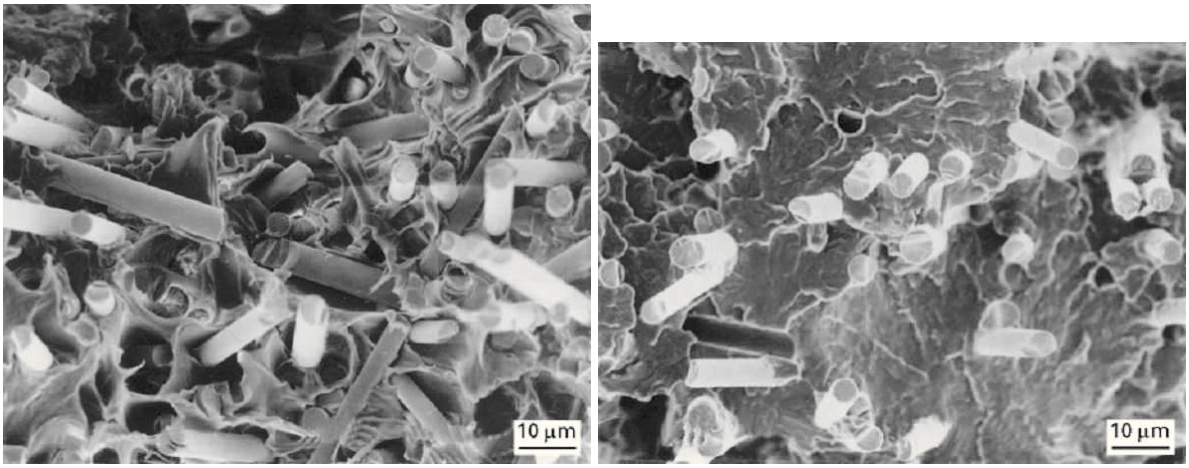
### b Rupture ductile ou rupture fragile ?

Le caractère ductile ou fragile de la rupture peut s'observer sur les faciès d'éprouvettes rompues. En effet, un thermoplastique ductile se déforme plastiquement, ce qui se traduit par exemple par la formation de *crazes* (microcraquelures, évoquées en section 1.2) pour un thermoplastique non chargé [165, 190], et par de fortes élongations au sein de la matrice pour un thermoplastique chargé. Cet étirement matriciel est la conséquence de la formation de fibrilles, qui émoussent dans un premier temps la pointe de fissure ; elles finissent par rompre lorsque qu'elles atteignent leur déformation maximale. Par ailleurs, Horst et Spoormaker [97] ont montré que ce phénomène est accompagné d'une contraction dans le sens transverse qui facilite la décohésion fibre-matrice, comme schématisé sur la figure 7.7. Cette hypothèse a été validée par la simulation numérique d'un volume représentatif constitué d'une extrémité de fibre et de la matrice avoisinante [96]. Lorsque la matrice se déforme plastiquement, l'effet de la contraction latérale apparaît alors supérieur à celui du cisaillement interfacial « naturel » (dû à la différence de raideur des constituants), et favorise donc bien le déchaussement des fibres.

Au contraire, un thermoplastique fragile ne présente pas de zone de grandes déformations matricielles. L'endommagement se produit plutôt par propagation d'une microfissure, qui devient une macrofissure et entraîne la ruine de la pièce. La propagation est souvent rapide et instable, et peut être décrite à l'aide des relations issues de la mécanique de la rupture fragile [97]. La différence entre les deux faciès de rupture est schématisée sur la figure 7.8, et est illustrée par des clichés MEB dans le cas d'un PA6-GF30 sur la figure 7.9.

### c Rupture sous chargement monotone

L'analyse des modes de propagation de fissure en fatigue s'appuie généralement sur une compréhension préliminaire des modes de propagation sous chargement monotone. Tous les auteurs qui se sont intéressés aux thermoplastiques renforcés en fibres courtes s'accordent sur le fait que les extrémités des fibres constituent des zones de concentration de contraintes à partir desquelles des microcavités peuvent se former, et initier des microfissures. À la concentration de contraintes (localement




(a) Rupture ductile (b) Rupture fragile

FIGURE 7.9 – Exemples de faciès de rupture caractéristiques d'une rupture de type (a) ductile ou (b) fragile, dans le cas d'un polyamide 6 renforcé en fibres de verre courtes (30 % en masse), conditionné à $\mathcal{H}$=50 %, à température ambiante. Clichés tirés des travaux de Horst et Spoormaker [97].

tri-axiales) s'ajoute le fait que les extrémités des fibres ne sont pas ensimées : l'adhésion fibre-matrice y est faible, ce qui contribue à augmenter la criticité de ces zones.

Un scenario de propagation est proposé par Sato et al. [178], qui s'appuient également sur des mesures d'émissions acoustiques, et dont l'analyse est corroborée par Mandell [136] :

- Lors d'un chargement monotone, les microfissures amorcées en bout de fibres se propagent le long de l'interface ;
- Si cette dernière est faiblement cohésive, les fibres sont mises à nu et la rupture peut se produire dès ce stade ;
- Dans le cas plus généralement rencontré d'une interface cohésive, les microfissures se propagent plus lentement, non pas exactement sur l'interface mais dans la matrice au voisinage de l'interface ;
- le chargement est alors repris de façon plus importante par la matrice qui se déforme plastiquement, puis rompt.

Une première zone de propagation stable peut alors être observée sur les faciès de rupture, caractérisée par une forte ductilité de la matrice ; la reste du faciès est une zone de propagation instable et fragile. La taille relative de ces deux zones dépend des conditions de sollicitations ainsi que des conditions environnementales : ainsi, un essai à une température très inférieure à $T_g$ (rupture cryogénique par exemple) présente un faciès quasi-exclusivement fragile, une rupture à vitesse lente est plus ductile qu'à vitesse élevée, etc.

### d Spécificités de l'endommagement sous chargement cyclique

Lang et al. [121], à partir d'observations au MEB, ont relevé plusieurs différences notables sur les faciès de rupture d'éprouvettes, suivant qu'elles soient cassées en sollicitation monotone ou cyclique (en traction uniaxiale dans les deux cas). Les auteurs mettent tout d'abord en avant l'effet néfaste de la fatigue sur la cohésion interfaciale, ce qui se traduit par le nombre plus important de fibres mises à nu, tandis que des fragments de matrice restent souvent collées aux fibres lors d'une rupture sous chargement monotone. Cependant, bien que les fibres puissent être plus facilement extraites de la matrice en fatigue, du fait de la moins bonne cohésion interfaciale, on n'observe pas une longueur plus

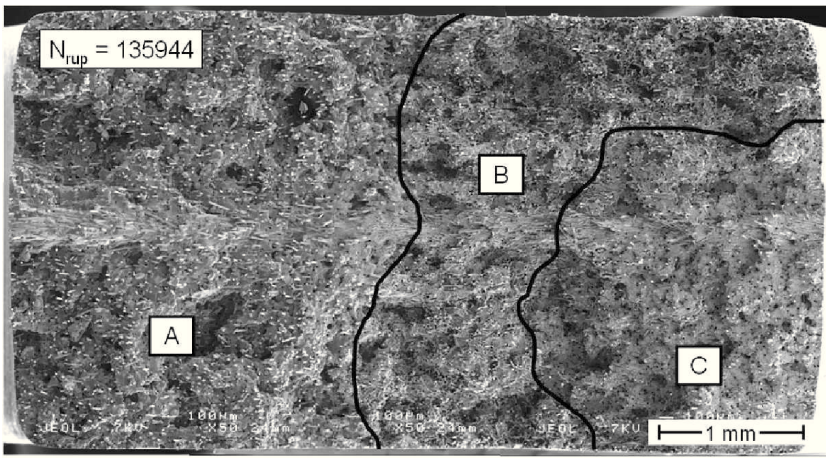



FIGURE 7.10 – Faciès de rupture en fatigue (traction répétée sur un PET+PBT-GF30 injecté, température ambiante). Zone A : rupture fragile lors de la propagation finale ; zone B : rupture ductile lors de la propagation finale ; zone C : zone de propagation de la microfissure, d'après Klimkeit [112].

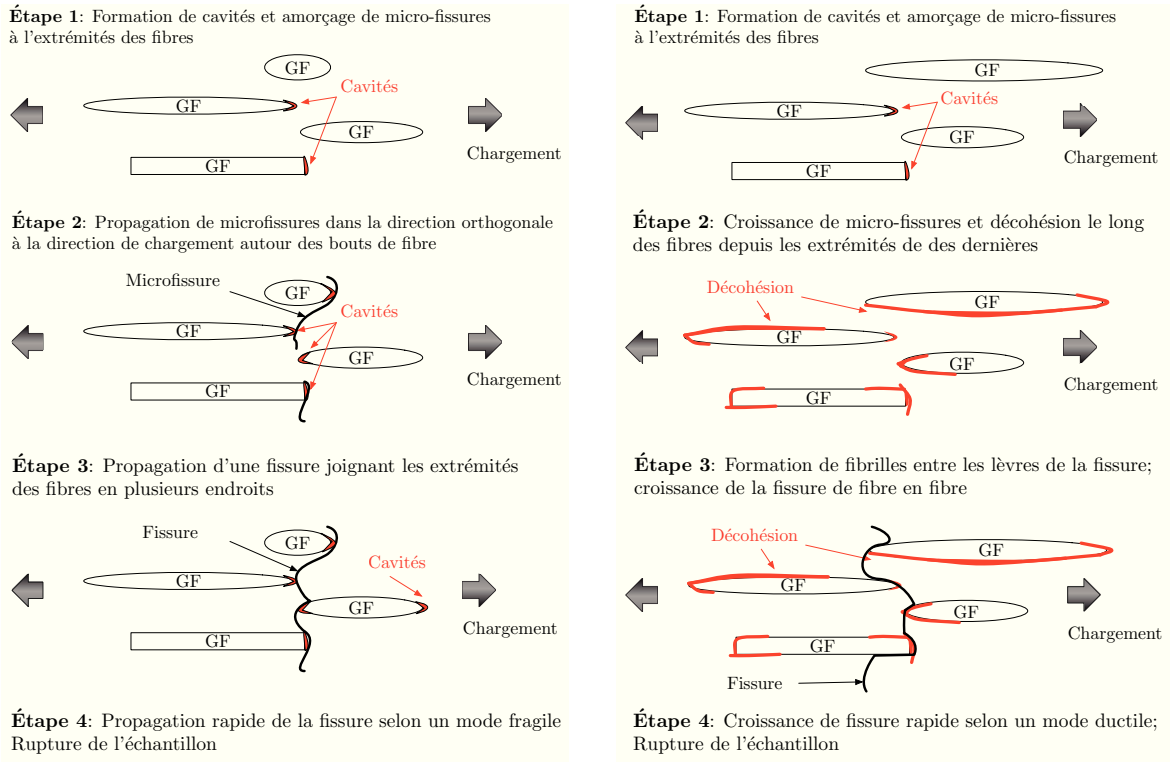
importante des fibres arrachées (en comparaison avec les faciès de rupture en chargement monotone). Cela peut sembler incohérent avec le fait que la décohésion fibre/matrice soit facilitée en fatigue. Cette contradiction apparente est levée en constatant que les phases de décharge (lors d'un chargement variable) entraînent la rupture d'un grand nombre de fibres, par compression, flexion ou flambage, lorsque les fibres sont extraites de la matrice.

Lang et Manson [120], ainsi que Klimkeit et al. [113] plus récemment, ont mis en évidence un auto-échauffement en pointe de fissure lors de chargements cycliques, qui est la signature des mécanismes dissipatifs locaux (déformation plastique cumulée dans la matrice, frottements entre les lèvres de la fissure) lors de la propagation de la micro-fissure de fatigue. Cette élévation locale de température modifie également les propriétés mécaniques de la matrice, et peut contribuer à expliquer son caractère plus ductile [97].

Klimkeit et al. [112, 113] ont remarqué que la distinction classique entre une zone ductile et une zone fragile sur un faciès de rupture en fatigue doit être affinée par l'ajout d'une troisième zone, où la rupture semble fragile mais où une observation plus précise montre un aspect finement étiré de la matrice (voir la figure 7.10). La confrontation avec des répliques a permis d'identifier cette zone comme celle de la propagation de la microfissure de fatigue (durant la phase d'amorçage). Leur analyse enrichit donc les observations faites par Horst et Spoormaker [95, 97], puisque ces derniers, en étudiant les faciès de rupture par fatigue d'éprouvettes en PA6-GF30, concluaient pour l'essentiel à l'accroissement de la zone ductile en fatigue (en comparaison avec le chargement monotone).

#### e Bilan : scenarii en fonction de la température de transition vitreuse

Nous nous basons ici sur les travaux de Noda et al. [150], qui ont étudié des éprouvettes de traction en PA66-GF33, injectées et sollicitées en fatigue à différentes températures. Pour les essais à température inférieure (resp. supérieure) à la température de transition vitreuse $T_g$, les auteurs sont parvenus aux mêmes conclusions que Horst et Spoormaker [97] pour un matériau sec (resp. conditionné à $\mathcal{H}$=50 %) à température ambiante. Cette observation est parfaitement cohérente avec le fait que les mécanismes de propagation dépendent du comportement de la matrice, pour laquelle nous




(a) $T < T_g$ (b) $T > T_g$

FIGURE 7.11 – Scenarii d'endommagement et de propagation d'une fissure en fatigue dans le cas d'un polyamide renforcé en fibres de verre courtes (a) en deçà ou (b) au-delà de sa température de transition vitreuse (reproduits à partir de Noda et al. [150]).

savons qu'une équivalence température-humidité peut être proposée (voir le chapitre 4). Nous récapitulons ici leurs résultats, illustrés sur la figure 7.11.

A faible température ou faible taux d'humidité, le scenario est le suivant :

1. L'endommagement se manifeste tout d'abord par l'apparition de microcavités en bout de fibres. Cette présomption classique est vérifiée par Noda et al. [150] qui observent des microfissures à partir des deux-tiers de la durée de vie.
2. Des microfissures perpendiculaires à la direction de traction se propagent ensuite à partir des cavités formées en mode I.
3. Ces microfissures peuvent coalescer, faisant apparaître une fissure de taille plus importante joignant les extrémités des fibres voisines entre elles.
4. Enfin, une de ces fissures finit par atteindre une taille critique et se propage rapidement de façon instable. Le faciès de rupture est donc essentiellement fragile.

A plus haute température, ou plus fort taux d'humidité, le mécanisme de propagation est semblable à celui proposé par Horst et Spoormaker [97] :

1. L'endomagement est toujours initié en bout de fibres (également observé aux deux-tiers de la durée de vie par Noda et al. [150]).

2. Les cavités se propagent cette fois-ci le long de l'interface fibre/matrice et conduisent à des décohésions partielles ou totale des fibres.
3. Ces cavités coalescent et des microfissures apparaissent entre les fibres dont l'interface est endommagée. Les fibres ne reprenant plus d'effort, la matrice est davantage sollicitée et donc fortement étirée, formant des crazes entre les deux lèvres.
4. Enfin, la rupture finale se produit par propagation d'une microfissure ayant atteint une taille critique. Même rapide, la propagation de la macrofissure finale reste fortement ductile, associée à des niveaux de déformations importants de la matrice.

**Remarque**

Nous avons illustré notre propos à l'aide d'exemples où les fibres sont majoritairement orientées dans le sens du chargement, qui correspondent à la majorité des cas étudiés dans la littérature. Cependant, Lang et al. [121], de même que Klimkeit [112], se sont intéressés au cas d'éprouvettes où les fibres sont orientées transversalement par rapport au chargement. Les auteurs concluent pour l'essentiel à l'observation des mêmes mécanismes que dans le cas longitudinal, à ceci près que la matrice en zone ductile est généralement moins étirée, puisque le déchaussement des fibres intervient de façon plus précoce, entraînant la rupture de l'éprouvette. Par ailleurs, nous avons proposé des mécanismes où les fibres sont considérées de façon individuelle, notre propos nécessiterait d'être complété dans le cas d'amas de fibres (*clusters*).

### 7.2.2 Étape d'amorçage

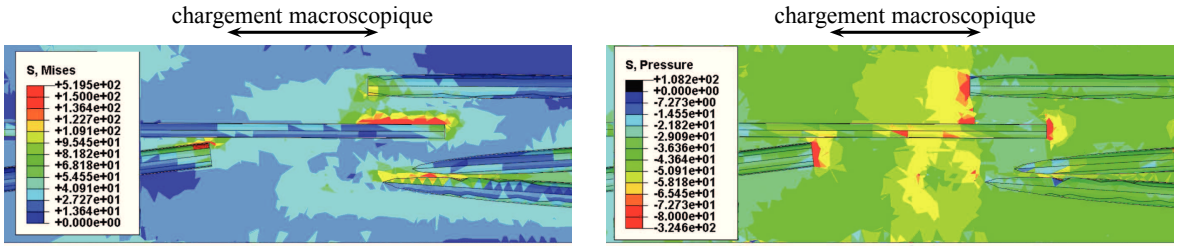
Nous avons décrit ci-dessus les mécanismes de propagation de fissure en fatigue. Lors de cette revue, nous avons mis en évidence le rôle de renfort joué par les fibres ainsi que l'influence des conditions environnementales sur la tenue en fatigue, mais nous avons également évoqué le fait que la phase de propagation ne concerne qu'une fraction limitée de la durée de vie. Nous nous proposons maintenant de détailler l'étape d'amorçage, qui pilote l'essentiel de la tenue en fatigue des thermoplastiques renforcés en fibres de verre courtes.

#### a Sites d'amorçage

Nous avons tenu pour acquis le fait que les extrémités des fibres soient des sites critiques. Klimkeit et al. [112, 113] ont réalisé des simulations numériques sur une microstructure 2D de façon à vérifier par le calcul ce phénomène, et ont montré que la contrainte de von Mises dans la matrice peut être multipliée par trois en bout de fibre [5]. Durant leur étude, ils ont également mis en évidence l'importance des interactions fibre-fibre, puisque la présence d'une sur-contrainte à l'extrémité d'une fibre est « vue » par les fibres voisines et génère des efforts de cisaillement à l'interface : ce phénomène contribue au mécanisme de décohésion, et les auteurs introduisent ici un second site potentiel d'amorçage de micro-fissures.

De façon à illustrer cette analyse sur une microstructure 3D, nous avons généré avec DIGIMAT® une microstructure représentative de l'éprouvette ISO527-2-1A, que nous avons soumise à une déformation moyenne de 1 % dans l'axe d'alignement majoritaire des fibres. Nous vérifions sur la figure 7.12 les observations de Klimkeit et al. puisque la contrainte de von Mises, qui mesure l'intensité du

5. Le calcul est réalisé avec des fibres infiniment rigides et une loi élastique isotrope pour la matrice. Il va de soit qu'une loi de comportement plus précise est nécessaire de façon à obtenir des résultats quantitatifs plus fiables.




(a) Contrainte équivalente de von Mises (en MPa)

(b) Opposé de la pression hydrostatique $-\frac{1}{3}\mathrm{Tr}\left(\underline{\underline{\sigma}}\right)$ (en MPa)

FIGURE 7.12 – Calcul par éléments finis sur une microstructure tri-dimensionnelle (représentative de l'éprouvette ISO527-2-1A), sollicitée dans l'axe d'alignement majoritaire des fibres, affichage de la matrice seule. Les fibres et la matrice ont un comportement élastique isotrope, dont les caractéristiques sont celles déterminées en condtions $T$=23 ˚C, $\mathcal{H}$=50 %.

cisaillement, est élevée aux extrémités des fibres ainsi que sur les zones circonférentielles, et nous montrons également la forte pression hydrostatique (positive) en bout de fibres, qui favorise la cavitation. Les valeurs obtenues, en raison de lois de comportement trop simples et d'un maillage sans doute trop grossier, n'ont pas de signification quantitative, mais le calcul permet néanmoins d'identifier la localisation des sites critiques, où s'amorcent potentiellement les fissures en fatigue.

Par ailleurs, des travaux menés lors d'une thèse en cours [101] ont pour objectif d'enrichir par des techniques expérimentales (microtomographie, auto-échauffement) la compréhension du lien entre la distribution d'orientation locale et les sites d'amorçage en fatigue. À l'échelle d'une éprouvette, les auteurs montrent que la matrice cisaillée entre les fibres présentant un angle avec la direction de chargement concentre une part importante de l'endommagement (sites de micro-plasticité ou micro-porosités).

### b Mécanismes d'amorçage

Mourglia Seignobos [148], à partir de techniques expérimentales déployées à l'échelle de la microstructure matricielle (diffusion des rayons X aux petits et très petits angles, microscopie électronique à transmission, diffraction), a proposé une explication des mécanismes d'endommagement lors de la phase d'amorçage. Dans un polyamide non chargé, le chargement en fatigue a pour conséquence la nucléation de cavités nanométriques dans la phase amorphe inter-lamellaire, les sites critiques étant identifiés comme les lamelles orientées perpendiculairement à la direction de traction. La croissance de ces cavités, thermiquement activée et anisotrope, permettrait d'expliquer la chute de raideur observée lors des premiers cycles de chargement (que nous avons modélisée lors du chapitre 3 par l'introduction d'un adoucissement cyclique) [6].

Dans le polyamide renforcé de fibres de verre courtes (PA66-GF30), Mourglia Seignobos [148] montre que les caractéristiques macroscopiques de l'endommagement en fatigue (raideur instantanée, déformation résiduelle, dissipation) suivent les mêmes évolutions que dans le polyamide 66 non renforcé, pour différentes températures. En effet, des observations au MEB sur des échantillons vierges ou fatigués, et rompus par cryofracture, montrent des porosités dans la matrice dont la taille augmente avec le chargement ; par ailleurs, le signal de diffusion des neutrons peut être expliqué par les

6. Cette chute de raideur lors des premiers cycles est également due, pour partie, à l'auto-échauffement du matériau et à l'établissement de l'équilibre thermique.

mécanismes caractérisés sur le PA66 non renforcé. Si la présence de fibres complique l'observation expérimentale dans le cas des thermoplastiques chargés, il semblerait néanmoins que les mécanismes d'amorçage soient liés à un phénomène de cavitation dans la phase amorphe inter-lamellaire.

### 7.2.3 Discussion

Dans l'optique du dimensionnement à la fatigue de thermoplastiques renforcés en fibres de verre, nous retenons plusieurs points-clés des résultats analysés dans cette section :

- les microfissures s'amorcent dans la matrice à l'extrémité des fibres, où l'interface est en général de moins bonne qualité et où les concentrations de contraintes sont importantes ;
- des contraintes de traction circonférentielles peuvent également être à l'origine d'un amorçage au voisinage du pourtour des fibres, selon les mécanismes proposés par Horst et Spoormaker [97] et Klimkeit [112] ;
- le mécanisme d'amorçage est piloté à l'échelle microscopique par la nucléation de cavités dans la phase matricielle, dont la croissance est thermiquement activée ;
- la température et l'humidité ont des influences similaires sur la phase de propagation de fissure, laquelle semble être gouvernée par l'écart à la température de transition vitreuse ;
- les mécanismes d'endommagement proposés font plutôt état d'une propagation rapide et brutale de la microfissure ayant atteint une taille critique, ce qui valide l'idée d'une approche par amorçage, puisque l'on peut légitimement supposer que $N_p \ll N_r$.

Les résultats de cette section montrent que certaines grandeurs microscopiques jouent un rôle majeur sur la tenue en fatigue des thermoplastiques renforcés en fibres de verre courtes : la pression hydrostatique (activant la cavitation locale), la ductilité de la matrice, la nucléation de cavités (dont une conséquence mécanique est l'adoucissement de la matrice), la distribution des fibres par rapport au chargement local, etc. L'approche phénoménologique retenue pour la modélisation du comportement cyclique ne permet évidemment pas de décrire de tels micromécanismes individuellement, mais a pour objectif de les traduire à l'échelle macroscopique. Nous justifions donc ici l'intérêt d'une loi de comportement suffisamment riche, dont les variables internes sont l'expression à l'échelle du VER des mécanismes locaux activant l'endommagement en fatigue.

## 7.3 Paramètres influents sur la tenue en fatigue

Dans cette section, nous passons en revue les différents paramètres relevés dans la littérature comme ayant une influence sur la tenue en fatigue des thermoplastiques renforcés en fibres de verre courtes. Les résultats que nous analysons ici sont présentés à l'aide de diagrammes $\sigma - \log N_r$, c'est-à-dire que l'amplitude (ou la valeur maximale) du signal sinusoïdal de contrainte appliqué est tracé en fonction du nombre de cycles à rupture $N_r$ (généralement confondu avec le nombre de cycles à amorçage $N_a$)[7].

### 7.3.1 Caractéristiques du matériau

À matrice thermoplastique donnée, la tenue en fatigue dépend tout d'abord des caractéristiques des renforts. Ainsi, l'augmentation de la fraction volumique de renforts ou de leur rapport d'aspect

7. Généralement, le nombre de cycles $N_r$ est représenté en échelle logarithmique ; si la contrainte est également en échelle logarithmique, on parle de diagramme de Basquin, sinon simplement de représentation $\sigma - \log N_r$ ou courbe de Wöhler.

améliore la tenue en fatigue du composite [136] [8]. Par ailleurs, le choix d'une matrice aux caractéristiques mécaniques supérieures permet également une meilleure tenue en fatigue à amplitude de contrainte fixée, sous réserve de conserver de bonnes propriétés interfaciales par un ensimage adéquat. D'une façon générale, nous pouvons remarquer que les propriétés en fatigue, évaluées dans un diagramme $\sigma - \log N_r$, sont corrélées aux propriétés statiques, et notamment à la contrainte à rupture du composite [201].

### 7.3.2 Conditions environnementales

L'influence de la teneur en humidité du matériau [13, 97] ainsi que de la température [53, 54, 83, 148, 150] sur la tenue en fatigue des thermoplastiques chargés ont fait l'objet de nombreuses études. Comme nous l'avons mentionné ci-dessus, ces deux paramètres ont une influence similaire sur la tenue en fatigue, puisqu'ils influencent la ductilité de la matrice, pilotée par l'écart à la température de transition vitreuse. Comme nous l'illustrons sur la figure 7.13, la tenue en fatigue décroît lorsque $T - T_g$ augmente. Nous remarquons d'ailleurs que, tout comme nous l'avons mis en évidence au chapitre 4, le passage de la température de transition vitreuse semble avoir une influence importante sur la pente des courbes de Wöhler [9].

En revanche, bien que le vieillissement thermique affecte les propriétés statiques, il semble que son influence soit mineure sur la tenue en fatigue [103]. Cette observation a été confirmée pour notre matériau pour lequel un vieillissement de 1000 heures à 140 °C ne modifie pas significativement la durée de vie [84].

### 7.3.3 Microstructure

Le terme « microstructure » prend ici deux sens. Tout d'abord, il désigne la distribution locale d'orientation des fibres, qui est étudiée par plusieurs auteurs en faisant varier les géométries d'éprouvette [112, 114], leur épaisseur [54] ou encore leur position par rapport au seuil d'injection [97]. La structure cœur/peau et l'intensité d'orientation des fibres dans la direction du chargement sont ainsi variables. Nous montrons sur la figure 7.14 que si la durée de vie est supérieure quand les éprouvettes présentent une distribution de fibres fortement alignées avec l'axe du chargement (c'est le cas des éprouvettes prélevées sur le bord des plaques), la pente des courbes de Wöhler est peu affectée. En revanche, nous constatons que la présence ou non de renforts a une influence forte sur la pente de la courbe $\sigma - \log N_r$, cela peut s'interpréter comme l'influence du nombre accru de sites d'amorçage potentiel dans le thermoplastique renforcé [10].

D'autre part, la microstructure recouvre également la distribution de longueur des fibres. Ainsi, des modèles micromécaniques fondés sur l'expression analytique de la résistance de l'interface permettent d'expliquer la chute de la contrainte à rupture lorsque la longueur moyenne des fibres diminue. Ces modèles peuvent être généralisés de façon à expliquer un effet similaire sur la tenue en fatigue [24].

8. Remarquons aussi que des fibres de carbone, malgré un contraste de propriétés mécaniques supérieur, permettent également d'augmenter la tenue en fatigue.

9. Il est difficile cependant d'utiliser quantitativement les résultats de Noda et al. [150], puisque la fréquence importante employée lors des essais de fatigue a pour conséquence un auto-échauffement significatif, malgré le choix d'éprouvettes de faible section : la température effective varie donc au cours d'un essai.

10. Remarquons même qu'au-delà de $10^4$ cycles, le matériau non chargé semble avoir une meilleure tenue en fatigue (figure 7.14). Ce résultat étonnant n'est pas confirmé par Mourglia Seignobos [148], ni par Zago et Springer [201] ; il pourrait s'expliquer par un effet néfaste du procédé de découpe sur la tenue en fatigue ou par une forte différence de cristallinité entre le polyamide seul ou en présence de fibres.

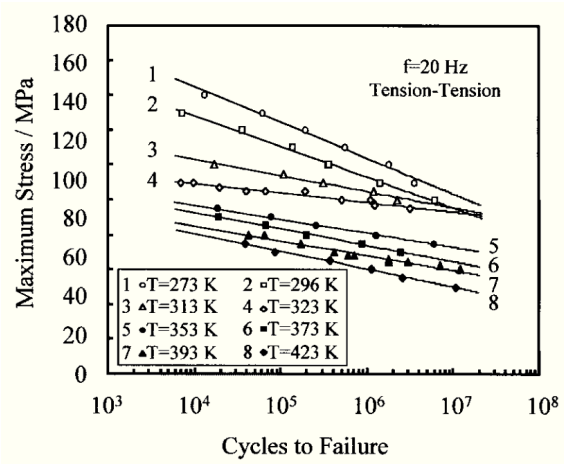



FIGURE 7.13 – Influence de la température sur la tenue en fatigue d'un PA66-GF33, d'après Noda et al. [150]. Les éprouvettes de traction sont sollicitées en traction répétée à 20 Hz, et $T_g$=323 K.

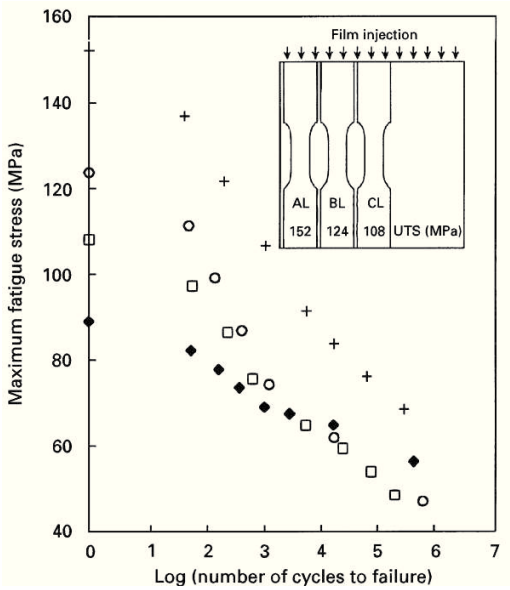



FIGURE 7.14 – Influence de la distribution locale d'orientation sur la tenue en fatigue d'un PA6-GF30, d'après Horst et Spoormaker [97]. Légende : + AL, ○ BL, □ CL, ◆ PA6 non chargé.

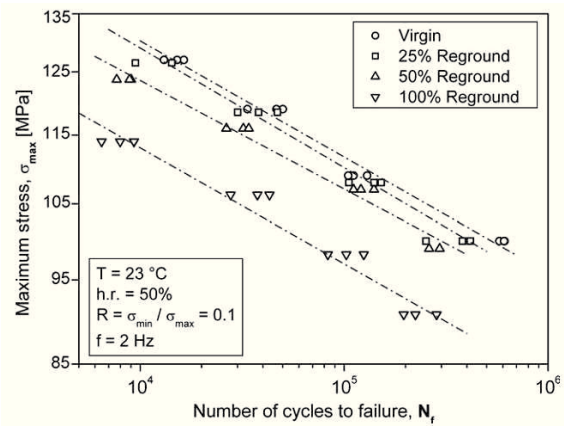



FIGURE 7.15 – Influence de la distribution de longueur de fibres sur la tenue en fatigue d'un PA66-GF35, d'après Bernasconi et al. [25]. La longueur moyenne (en masse) des fibres vaut respectivement 343, 338, 300 et 274 microns quand augmente le pourcentage de matériau rebroyé.

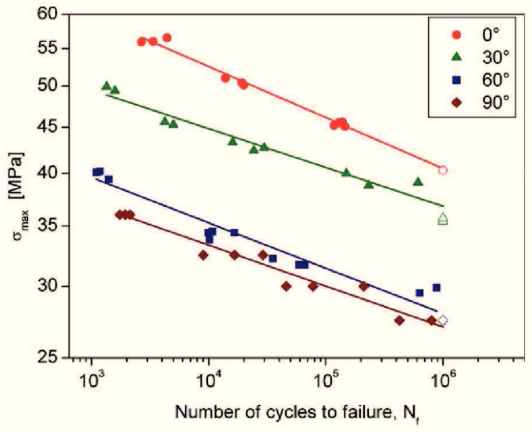



FIGURE 7.16 – Influence de l'angle entre le chargement mécanique de traction et le repère matériel local sur la tenue en fatigue d'un PA6-GF30, d'après Bernasconi et al. [24]. Les éprouvettes de traction sont prélevées dans des plaques injectées à différents angles par rapport au flux d'injection.

Une fois de plus, nous constatons sur la figure 7.15 que la pente dans le diagramme $\sigma - \log N_r$ reste constante au premier ordre.

### 7.3.4 Nature du chargement mécanique

#### a Direction du chargement par rapport au repère matériel

En découpant des éprouvettes de traction au centre de plaques injectées, à différents angles par rapport à la direction du flux d'injection, il est possible d'étudier l'influence de la direction du chargement à microstructure identique. De façon intuitive, les auteurs ayant mené ce genre de travaux [24, 54, 201] aboutissent à la même conclusion que lorsque l'on fait varier l'intensité de l'orientation, à savoir que les pentes des courbes $\sigma - \log N_r$ sont peu modifiées, et que plus la direction du chargement est proche de l'axe d'alignement majoritaire des fibres (ici la direction du flux d'injection), meilleure est la tenue en fatigue (voir la figure 7.16).

#### b Multiaxialité

L'influence de chargements multiaxiaux peut être étudiée à l'aide d'éprouvettes tubulaires, soumises à des sollicitations de traction et de torsion, et d'épaisseur comparable aux éprouvettes plates de traction (3 mm). Les travaux de Klimkeit et al. [112, 114] ainsi que ceux de De Monte et al. [53], réalisés sur un PA66-GF35 à température ambiante (sec ou conditionné), permettent d'évaluer l'effet du taux de bi-axialité ainsi que l'effet du déphasage entre les deux signaux. Ces essais, d'autant plus intéressants qu'ils sont réalisés sur un matériau très proche de celui de notre étude, seront étudiés plus en détail lors du chapitre 8. D'une façon générale, les chargements multiaxiaux permettent de mettre en évidence que, tout comme pour les matériaux métalliques, les contraintes de cisaillement jouent un rôle important sur la tenue en fatigue.

#### c Effets de contrainte moyenne

Les effets de contrainte moyenne sont généralement illustrés par la sensibilité au rapport de charge $R$, défini pour un essai de fatigue piloté en effort par :

$$R = \frac{\sigma_{\text{min}}}{\sigma_{\text{max}}} \quad \Leftrightarrow \quad \sigma_{\text{m}} = \frac{1+R}{1-R}\sigma_{\text{a}} \tag{7.18}$$

où $\sigma_{\text{m}}$ et $\sigma_{\text{a}}$ sont respectivement la moyenne et l'amplitude du signal de contrainte appliqué. Quand la contrainte moyenne est positive, le caractère viscoélastique des matériaux à matrice thermoplastique explique qu'il faille potentiellement tenir compte d'un couplage fatigue-fluage (illustré sur la figure 7.6 page 148), qui a un effet négatif sur la tenue en fatigue [201]. Par ailleurs, à amplitude de contrainte constante, un rapport de charge plus élevé se traduit par l'activation de mécanismes viscoplastiques ; ces mécanismes dissipatifs contribuent à la réduction de la durée de vie. Mallick et Zhou [135] ont montré que des courbes de Gerber modifiées permettent de modéliser la sensibilité au rapport de charge, à partir des résultats expérimentaux présentés sur la figure 7.17.

#### d Influence de la fréquence du chargement

En raison de la faible conductivité thermique des thermoplastiques, l'augmentation de la fréquence du chargement conduit généralement à un auto-échauffement des structures sollicitées en fatigue [120]. La température effective du matériau est alors supérieure à la température ambiante, ce qui

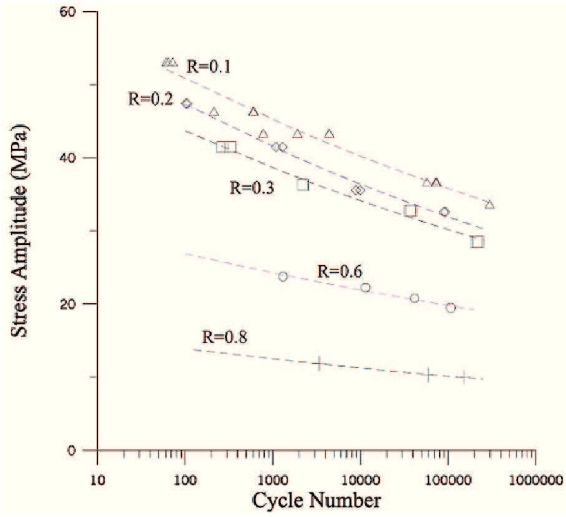



FIGURE 7.17 – Influence du rapport de charge $R$ sur la tenue en fatigue d'un PA66-GF33 (à 23 °C), d'après Mallick et Zhou [135].

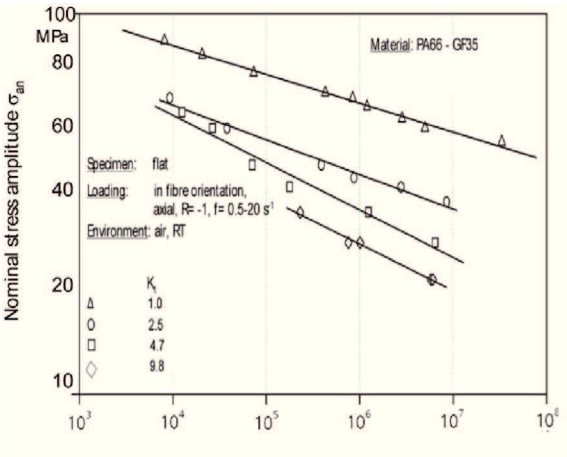


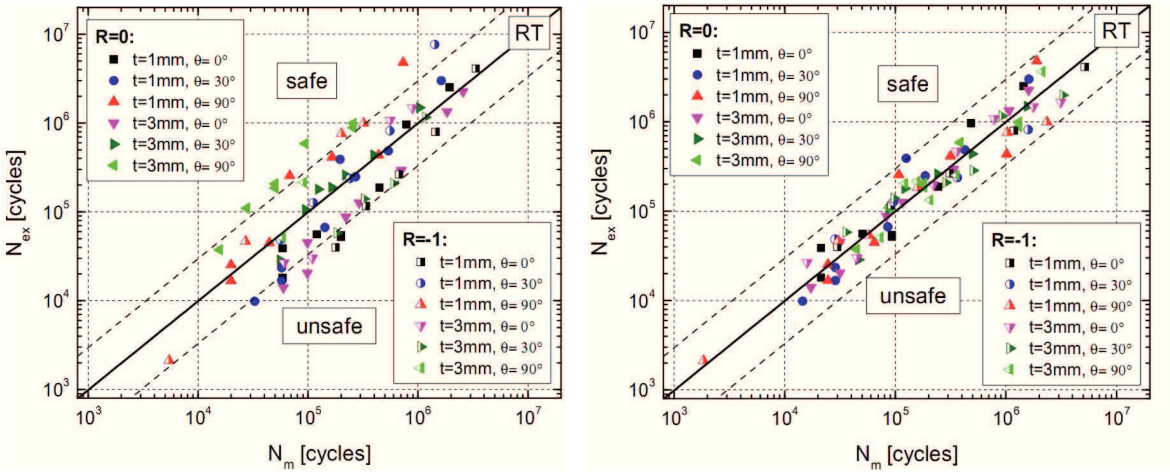

FIGURE 7.18 – Influence du facteur d'entaille $K_t$ sur la tenue en fatigue d'éprouvettes injectées en PA66-GF35, d'après Sonsino et Moosbrugger [184].

a pour conséquence une réduction de la tenue en fatigue (voir section 7.3.2) qui est vérifiée expérimentalement par de nombreux auteurs [17, 36, 87, 201]. À ce sujet, Handa et al. [83] ont proposé de modéliser l'influence de la fréquence sur la tenue en fatigue à l'aide d'une équivalence fréquence-température, approche reprise par Bernasconi et Kulin [26] qui ont fait le lien entre la tenue en fatigue et la vitesse de fluage.

En outre, dans le cas où l'énergie dissipée par les mécanismes de déformation irréversible ne peut être évacuée sous forme de chaleur vers le milieu extérieur (par convection aux surfaces libres), la température de l'échantillon augmente sans stabilisation, ce qui conduit généralement à une rupture précoce dite de « fatigue thermique » [89].

### 7.3.5 Effets d'entaille

Tout comme pour les matériaux métalliques, la présence de singularités géométriques induit des concentrations de contrainte en fond d'entaille, et donc une réduction de la tenue en fatigue, comme le montre la figure 7.18. Néanmoins, il est important de définir la taille du volume surcontraint dans une approche de dimensionnement en bureau d'étude [184]. Notons que pour des facteurs d'entaille $K_t$ élevés, ce volume peut être de taille inférieure à la taille du VER de la microstructure, ce qui rend potentiellement indispensable une description multi-échelle du matériau.




(a) Normalisation par la contrainte à rupture

(b) Critère de Tsai-Hill adapté à la fatigue

FIGURE 7.19 – Corrélation entre la durée de vie mesurée expérimentalement ou prédite par un critère de fatigue pour des essais de fatigue en traction sur des éprouvettes prélevées dans des plaques (épaisseur 1 et 3 mm) à différents angles, d'après les travaux de De Monte et al. [54] sur un PA66-GF35. Les deux rapports de charge $R$ sont identifiés séparément.

## 7.4 Critères proposés dans la littérature pour les thermoplastiques chargés

Dans cette dernière section de notre étude bibliographique, nous passons en revue les critères de dimensionnement en fatigue proposés dans la littérature pour les thermoplastiques renforcés en fibres de verre courtes.

### 7.4.1 Critères en contrainte

#### a Normalisation par la contrainte à rupture

Comme nous l'avons mis en évidence en section 7.3, plusieurs paramètres ont une influence similaire sur la tenue en fatigue et sur la contrainte à rupture $\sigma_u$. En outre, si les courbes de Wöhler ont la même pente, il est naturel de réunir sur une même courbe maîtresse $\sigma/\sigma_u - \log N_r$ des essais effectués sur des microstructure différentes (en termes d'orientation [24, 54] ou de distribution de longueurs de fibres [25]). Nous illustrons sur la figure 7.19a que la normalisation des courbes de Wöhler par la contrainte à rupture permet de bien corréler les durées de vie $N_r$ mesurées et prédites [11].

#### b Critère de Tsai-Hill

Bernasconi et al. [24] et De Monte et al. [54] ont proposé d'utiliser le critère de Tsai-Hill généralisé à la fatigue (Eq. 7.10). Il est possible de simplifier son expression en tirant parti du fait que les pentes de Basquin sont peu sensibles à la direction du chargement (hypothèse d'égalité des coefficients $b_i$ et $c$). Ce critère permet d'obtenir de bons résultats pour prédire la durée de vie en fatigue des thermoplastiques renforcés lorsque l'angle entre la direction de chargement et la distribution d'orientation varie.

11. L'amorçage et la rupture finale sont confondus dans cette étude, en raison de la faible durée de la phase de propagation.

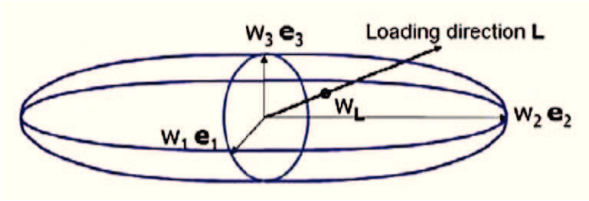



FIGURE 7.20 – Détermination de la limite de fatigue $w_L$ dans la direction du chargement, en fonction des limites de fatigue $w_i$ interpolées dans les directions matérielles locales (notées ici $\mathbf{e}_i$), d'après Gaier et al. [75].

Cependant, un tel critère, tout comme la normalisation par la contrainte à rupture, ne décrit pas l'influence de la contrainte moyenne, des conditions hygrothermiques ou de la multiaxialité du chargement. Remarquons qu'en outre, le critère de Tsai-Hill doit être identifié pour chaque épaisseur de plaque, puisque le ratio cœur/peau est différent : le problème de la sensibilité à la microstructure est reporté sur la détermination des coefficients $S_i$ et $T$.

### c Approche en plan critique

Zago et Springer [202] proposent une démarche de dimensionnement applicable sur structures industrielles, reprise et enrichie par Gaier et al. [75]. Elle s'appuie sur la simulation par éléments finis de la réponse mécanique à l'aide d'une loi élastique anisotrope tenant compte du champ tensoriel d'orientation d'ordre 2 (semblable à la loi n°2 proposée au chapitre 6). Le tenseur des contraintes est exprimé dans le repère matériel local $(\underline{u}_i)_{i=1,2,3}$ [12]. Les propriétés en fatigue sont déterminées par interpolation linéaire selon $a_i$ à partir de deux conditions d'essais (typiquement, des éprouvettes prélevées à 0 et 90° dans des plaques injectées). Le principe est alors de déterminer la direction $\underline{n}$ (qui définit la normale du plan critique) pour laquelle le rapport entre la contrainte normale $\sigma_{nn}$ et la résistance en fatigue (pour un nombre de cycles $N_r$ fixé) est le plus important (voir la figure 7.20). Ce critère tient compte de l'influence de chargements de directions variables au moyen d'une loi de cumul d'endommagement non linéaire [203], et est développé pour une utilisation industrielle. Néanmoins, l'hypothèse selon laquelle seule la contrainte normale au plan critique pilote la durée de vie n'est pas étayée par les auteurs. En outre, la démarche est directement appliquée sur structure complexe, mais il manque une étape de validation intermédiaire dans des cas où l'hypothèse d'interpolation linéaire et la détermination du plan critique pourraient être vérifiées.

### d Critère de Tsai-Hill modifié

Le critère de Tsai-Hill adapté à la fatigue, utilisé par Bernasconi et al. [24] et De Monte et al. [54] permet de décrire la sensibilité de la durée de vie en fatigue à l'angle entre l'orientation du matériau et l'axe du chargement, mais est identifié pour une microstructure donnée. Il est donc difficile d'appliquer un tel critère à une pièce industrielle où le champ microstructural est hétérogène ; une formulation doit donc être proposée de façon à tenir explicitement compte de la distribution locale d'orientation (à travers le champ tensoriel $\underline{\underline{a}}^{\psi}$), selon la même philosophie que l'approche en plan critique évoquée ci-dessus. Cette idée sera développé au chapitre 8.

12. Nous renvoyons le lecteur aux notations introduites en section 5.1.

### 7.4.2 Critère en densité d'énergie élastique

Klimkeit et al. [112, 114] sont à notre connaissance les seuls auteurs à avoir proposé dans la littérature un critère pour la fatigue multiaxiale des thermoplastiques renforcés en fibres de verre courtes. Ils ont montré qu'il est possible de corréler la durée de vie $N_r$ à la densité d'énergie élastique de déformation $\Delta W_e$. Leurs travaux, appliqués à un PBT+PET-GF30 ainsi qu'à un PA66-GF35, permettent de prédire avec une précision correcte la durée de vie sous des chargement de traction, torsion et traction/torsion en phase d'éprouvettes tubulaires injectées en thermoplastique chargé. Ce critère semble également permettre de décrire la dépendance à la microstructure, puisque la base expérimentale comporte des essais de traction sur des éprouvettes découpées dans des plaques à 0 et 90°, ainsi que des essais de cisaillement pur (type Iosipescu). Le critère proposé, inspiré des travaux de Kujawski et Ellyin [116], tient compte de l'influence de la contrainte moyenne au moyen d'une fonction empirique de $R$, et s'écrit :

$$f \Delta W_e \cdot N_r^b = C \quad \text{avec} \quad f^2 - \frac{1+R}{1-R} f - 1 = 0 \tag{7.19}$$

Les résultats obtenus dans le cas du PA66-GF35 seront discutés plus en détail lors de notre chapitre 8. Remarquons que De Monte et al. [55] a proposé d'utiliser un critère similaire pour tenir compte de l'influence du facteur d'entaille sur des éprouvettes de traction. Le critère en densité d'énergie élastique semble donc pertinent pour un large champ d'applications, même si Klimkeit [112] reconnaît que la prise en compte des composantes non linéaires de la déformation est nécessaire pour parvenir à un critère plus prédictif. Par ailleurs, la formulation du critère proposé n'est pas adaptée à l'analyse de chargements quelconques, notamment en présence de voies d'efforts déphasées [13], et nécessiterait une formulation réellement multiaxiale.

### 7.4.3 Critère en déformation

Dans ses travaux de thèse, Mourglia Seignobos [148] a réalisé des essais de fatigue sur des éprouvettes de traction en PA66-GF30 sollicitées à différentes températures ($T$=25, 65, 140 °C) et différentes fréquences ($f$=0.5, 5 Hz). La figure 7.21 montre que la normalisation des courbes de Wöhler par le module de Young permet de construire une courbe maîtresse décrivant la tenue en fatigue sur une large gamme de conditions ($T$, $f$). Le module de Young correspond à la température d'auto-échauffement de l'éprouvette, et est mesuré sur un balayage en température avec un essai de DMA. Ce résultat montre qu'un critère formulé en amplitude de déformation permet de tenir compte de l'influence des conditions environnementales. Néanmoins, il n'est évalué que pour une microstructure donnée sous un seul type de chargement, et semble peu adapté à une application sur structure.

### 7.4.4 Bilan

Différents critères ont été proposés dans la littérature pour modéliser la tenue en fatigue des thermoplastiques renforcés en fibres de verre courtes. À l'heure actuelle, il n'existe pas de consensus autour d'un modèle permettant de décrire l'influence de tous les paramètres évoqués en section 7.3 : conditions hygrothermiques, multiaxialité, sensibilité à la microstructure locale, effets d'entaille, etc. Le critère en densité d'énergie élastique de déformation semble le plus intéressant au vu de son spectre d'application, mais n'a fait pour l'instant l'objet d'une évaluation que pour une seule condition hygrothermique. Il n'a également été mis en œuvre que sur des éprouvettes.

13. Ni la définition de $R$ ni l'expression de la densité d'énergie $\Delta W_e$ ne sont univoques pour des chargements multiaxiaux déphasés par exemple.

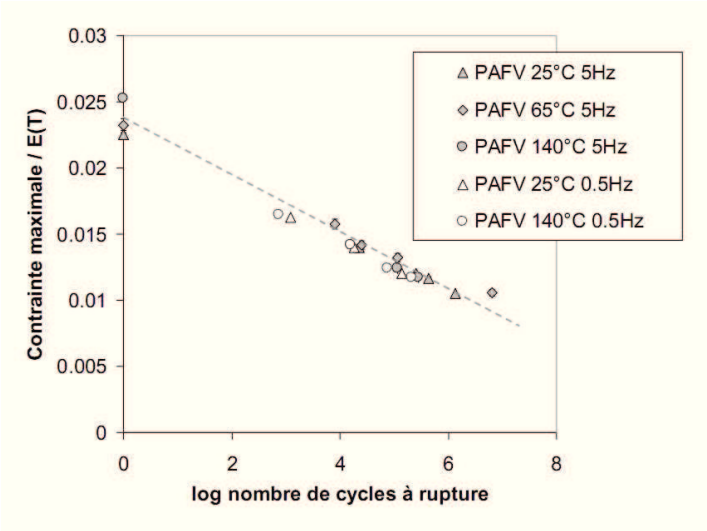



FIGURE 7.21 – Normalisation des courbes de Wöhler par le module élastique apparent pour différentes températures $T$ et fréquences d'essai $f$, sur des éprouvettes de traction en PA66-GF30, d'après [148].

Nous remarquons que tous les travaux présentés se fondent sur la détermination d'une loi de comportement élastique linéaire (généralement anisotrope). Pourtant, nous avons montré que les mécanismes d'endommagement sont sensibles au caractère ductile de la matrice thermoplastique. Il nous semble donc, tout comme Klimkeit [112] l'a mentionné, que la description d'une loi de comportement non linéaire doit permettre d'enrichir la discussion autour du choix d'un critère de fatigue pour les thermoplastiques chargés. C'est ce que nous allons montrer au chapitre 8, à l'aide d'une analyse comparative quantitative des performances des critères que nous avons présentés.

# Chapitre 8

# Proposition d'un critère de fatigue multiaxiale

**Sommaire**


**8.1 Analyse d'essais de la littérature . . . . . 169**
8.1.1 Données expérimentales . . . . . 170
8.1.2 Résultats d'essais . . . . . 172
8.1.3 Simulation numérique . . . . . 172
**8.2 Application des critères classiques . . . . . 173**
8.2.1 Critère de Tsai-Hill modifié . . . . . 174
8.2.2 Méthodologie . . . . . 175
8.2.3 Critères polycycliques . . . . . 176
8.2.4 Critères oligocycliques . . . . . 180
**8.3 Discussion : vers un critère énergétique . . . . . 182**
8.3.1 Performances des différents critères testés . . . . . 182
8.3.2 Comparaison avec le critère de Klimkeit . . . . . 183
8.3.3 Bilan . . . . . 184


Dans ce chapitre, des essais de fatigue publiés dans la littérature au sujet du PA66-GF35 sont analysés à l'aide du modèle de comportement proposé en partie I. Dans un premier temps, nous présentons les données expérimentales exploitées, obtenues sur un PA66-GF35 à température ambiante, à l'état DAM ou conditionné à $\mathcal{H}$=50 %. La simulation numérique des essais à l'aide de la loi de comportement non linéaire anisotrope permet de comparer plusieurs critères de fatigue, présentés au chapitre 7, et appliqués à un cycle de chargement en régime stationnaire. Nous concluons en montrons la pertinence d'un critère fondé sur la densité d'énergie dissipée par cycle.

Les résultats de ce chapitre ont été soumis pour publication dans la revue *International Journal of Fatigue* [122].

## 8.1 Analyse d'essais de la littérature

Nous analysons dans ce chapitre les essais de fatigue multiaxiale publiés par De Monte et al. [53] et Klimkeit [112]. Dans cette première section, nous détaillons les conditions expérimentales ainsi que le cadre d'application du modèle de comportement proposé.

### 8.1.1 Données expérimentales

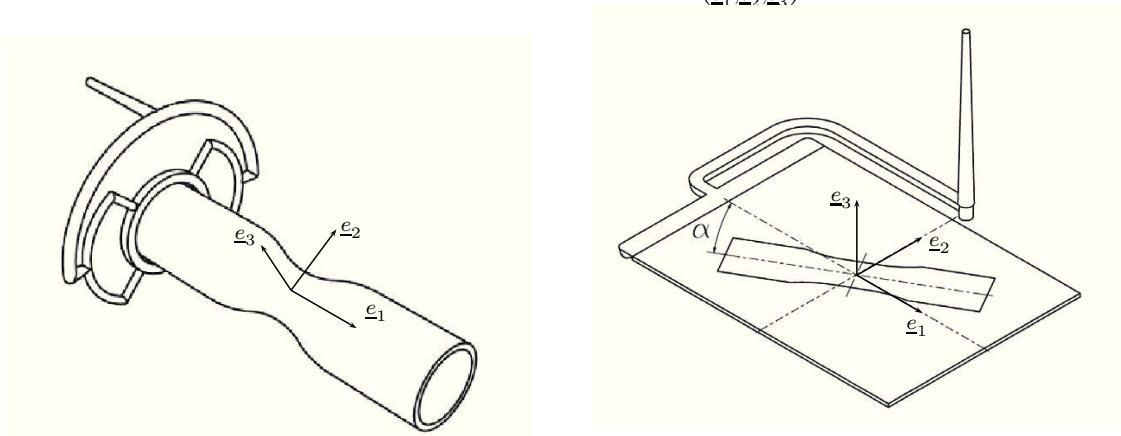
#### a Conditions d'essai et éprouvettes

De Monte et al. [53] ont utilisé des éprouvettes tubulaires (voir figure 8.1a) en PA66-GF35 à l'état sec (DAM) et à température ambiante (23 °C). Les auteurs ont simulé le procédé d'injection avec MOLDFLOW® afin d'évaluer la distribution d'orientation des fibres. Celle-ci est homogène dans la zone utile de l'éprouvette, avec des fibres majoritairement alignées selon la direction du flux d'injection. Une observation par micro-tomographie aux rayons X a permis de valider l'hypothèse d'homogénéité, mais montre par contre que la simulation numérique sur-estime la composante $a^{\psi}_{11}$ du tenseur d'orientation d'ordre deux. Le tenseur d'orientation dans la zone utile, moyenné sur l'épaisseur, est évalué à partir des mesures expérimentales selon :

$$\underline{\underline{a}}^{\psi}(\text{tube}) = \begin{bmatrix} 0.76 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.23 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.01 \end{bmatrix}_{(\underline{e}_1,\underline{e}_2,\underline{e}_3)} \tag{8.1}$$

Klimkeit [112] a travaillé sur les mêmes éprouvettes tubulaires, à température ambiante mais avec un PA66-GF35 conditionné à $\mathcal{H}$=50 %. Il a également utilisé des éprouvettes découpées dans des plaques à 0° et 90° (voir la figure 8.1b). Une simulation d'injection est réalisée de façon à déterminer le champ tensoriel d'orientation $\underline{\underline{a}}^{\psi}$ dans la plaque, et en particulier dans la zone utile des éprouvettes de traction. Les modules élastiques mesurés par Klimkeit [112] dans différentes directions laissent supposer que MOLDFLOW® sous-estime la proportion de fibres alignées dans le sens transverse (zone de cœur). Une identification inverse permet d'estimer le tenseur d'orientation moyenné sur l'épaisseur dans la zone utile de l'éprouvette selon :

$$\underline{\underline{a}}^{\psi}(\text{plaque}) = \begin{bmatrix} 0.62 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.28 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.10 \end{bmatrix}_{(\underline{e}_1,\underline{e}_2,\underline{e}_3)} \tag{8.2}$$




(a) Éprouvette tubulaire injectée, d'après [112]. $\underline{e}_1$ est l'axe de révolution (direction principale du flux d'injection), $\underline{e}_2$ l'axe orthoradial, et $\underline{e}_3$ est l'axe radial (hors-plan).

(b) Éprouvette de traction prélevée dans une plaque injectée, d'après [112]. $\underline{e}_1$ est l'axe du flux d'injection, $\underline{e}_2$ l'axe transverse (dans le plan), et $\underline{e}_3$ est l'axe hors-plan.

FIGURE 8.1 – Géométrie des éprouvettes étudiées dans ce chapitre, d'épaisseur 3 mm. Les dimensions précises sont fournies par Klimkeit [112].

### b Chargements mécaniques

Les deux études réalisées par Klimkeit et De Monte (et al.) sont intéressantes car elles font intervenir une large palette de chargements mécaniques. Les éprouvettes tubulaires sont ainsi sollicitées en traction, torsion et traction-torsion. Les chargements combinés sont en-phase (angle de déphasage $\delta = 0°$) ou hors-phase ($\delta = 90°$), avec des rapports de biaxialité différents.

En respectant la notation proposée par De Monte et al. [53], on définit le rapport de biaxialité $\lambda_2 \equiv \tau_{12}/\sigma_{11}$, où $\tau_{12}$ est la contrainte de cisaillement dans la zone utile de l'éprouvette tubulaire (conséquente à une torsion globale), et $\sigma_{11}$ la contrainte axiale (conséquente à une traction globale). $\lambda_2$ prend les valeurs 0 (cas d'une traction simple), 1/3, 1/2 ou 1 (cas de chargements combinés de traction-torsion), ou $+\infty$ (cas d'une torsion simple). Par ailleurs, la géométrie de l'éprouvette tubulaire explique qu'un chargement de traction se traduit également par une contrainte circonférentielle $\sigma_{22}$. De Monte a évalué ce second rapport de biaxialité $\lambda_1 \equiv \sigma_{22}/\sigma_{11}$ à 0.22.

Remarquons que les rapports de biaxialité $\lambda_1$ et $\lambda_2$ sont calculés par De Monte et al. [53] à l'échelle locale à partir de simulations numériques par éléments finis de l'éprouvette tubulaire, le comportement étant supposé élastique isotrope transverse. Bien que nous ayions mis en évidence le caractère non linéaire de la réponse mécanique du PA66-GF35, nous considèrerons dans la suite de cette étude que les mécanismes non linéaires sont concentrés dans la zone utile de l'éprouvette et que nous pouvons négliger les effets de redistribution de contrainte. Nous faisons donc l'hypothèse que les états de contrainte locaux ainsi que les rapports de bi-axialité sont correctement évalués par les auteurs.

Les éprouvettes plates étudiées par Klimkeit ne sont sollicitées qu'en traction. L'usage de ces éprouvettes permet de caractériser la tenue en fatigue du PA66-GF35 ayant une microstructure différente de celle de l'éprouvette tubulaire. La direction du chargement est soit parallèle ($\lambda_1 = 0$, éprouvette prélevée à 0°) soit perpendiculaire ($\lambda_1 = \infty$, éprouvette prélevée à 90°) à $\underline{e}_1$, qui est confondu avec le vecteur propre associé à l'orientation principale maximale, $a^{\psi}_{11}$.

Les signaux d'effort sont sinusoïdaux. Le rapport de charge $R$ vaut soit 0 [1] (chargement répété) soit -1 (chargement alterné). Différents niveaux de contraintes ont été réalisés pour chaque cas de chargement, de façon à étudier la tenue en fatigue sur une large gamme de durées de vie. La fréquence d'essais n'est malheureusement pas donnée par les auteurs, qui indiquent seulement qu'elle est fixée pour chaque niveau de chargement de façon à limiter l'auto-échauffement des éprouvettes. Nous faisons donc l'hypothèse, sur la base des essais d'auto-échauffement que nous avons réalisés (voir le chapitre 3), que la gamme de fréquence s'échelonne entre 1 Hz et 5 Hz, les fréquences les plus élevées étant associées aux chargements mécaniques les plus faibles.

En résumé, les deux études expérimentales constituent une base de données très riche, qui permet de caractériser la tenue en fatigue du PA66-GF35 sous différentes conditions environnementales (matériau DAM ou RH50), et qui permet d'illustrer l'influence de différents paramètres tels que :

- le rapport entre contrainte normale et cisaillement ($\lambda_2 = 0,\ 1/3,\ 1/2,\ 1,\ \infty$) ;
- les effets de contrainte moyenne ($R = 0,\ -1$) ;
- la non-proportionnalité du chargement ($\delta = 0,\ 90°$) ;
- la microstructure locale ($\underline{\underline{a}}^{\psi}$(tube, plaque)) ;
- l'angle entre la direction de chargement et la direction d'alignement majoritaire des fibres ($\lambda_1 = 0,\ 0.22,\ \infty$).

1. Dans le cas des éprouvettes de traction plates étudiées par Klimkeit, l'auteur précise que $R$ vaut 0.1 plutôt que 0. Nous en avons tenu compte dans les calculs, mais nous labellisons ces essais comme « $R = 0$ » pour simplifier la présentation.

Le tableau 8.1 récapitule l'ensemble des paramètres étudiés lors des deux études. Seuls des chargements de contraintes planes sont étudiés, mais ils sont représentatifs de la plupart des cas industriels (notamment sur le circuit d'admission d'air), où les structures sont minces et peu sollicitées dans les directions hors-plan.

| Éprouvette | | Tubulaire | | | | | | | Traction plate | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Notation abrégée | | Tr | To | Tr∝To | Tr∝̸To | 2Tr∝To | 3Tr∝To | 3Tr∝̸To | Tr∥ | Tr⊥ |
| Paramètres | $\lambda_1$ | 0.22 | | 0.22 | 0.22 | 0.22 | 0.22 | 0.22 | 0 | ∞ |
| | $\lambda_2$ | 0 | ∞ | 1 | 1 | 1/2 | 1/3 | 1/3 | 0 | 0 |
| | $\delta$ | | | 0° | 90° | 0° | 0° | 90° | | |
| De Monte DAM, 23 °C | $R = 0$ | ■ | ● | ▶ | ◀ | | ▲ | ▼ | | |
| | $R = -1$ | □ | ○ | ▷ | ◁ | | △ | ▽ | | |
| Klimkeit RH50, 23 °C | $R = 0$ | ■ | ● | | | ▲ | | | ■ | ■ |
| | $R = -1$ | □ | ○ | | | △ | | | □ | □ |

TABLE 8.1 – Résumé des différents cas de chargements étudiés par De Monte et al. [53] ainsi que par Klimkeit [112]. Les symboles sont ceux qui seront utilisés dans la suite de ce chapitre. Le rapport de charge pour les chargements de fatigue multiaxiaux est défini par voie d'effort.

### 8.1.2 Résultats d'essais

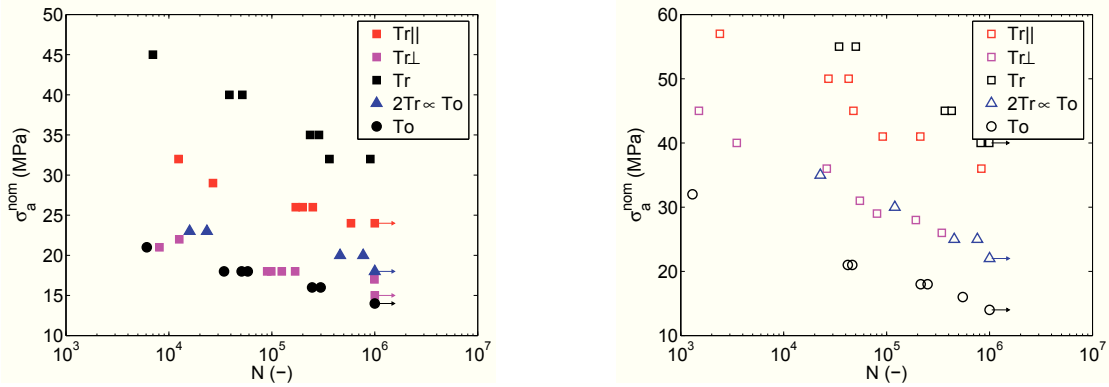
Dans cette étude, la durée de vie en fatigue est évaluée à l'aide du nombre de cycle à rupture $N_r$. La confusion entre le nombre de cycles à amorçage $N_a$ et le nombre de cycles à rupture est permise puisque comme nous l'avons évoqué au chapitre 7, la phase de propagation est brève, ce que confirment Klimkeit et al. [113].

Klimkeit [112] indique que la rupture se produit en règle générale dans la zone utile des éprouvettes tubulaires et des éprouvettes plates. De Monte et al. [53] font état de quelques cas (en traction simple) où la rupture ne se produit pas dans la zone utile, mais plutôt dans le congé de l'éprouvette tubulaire. Klimkeit [112] a également remarqué qu'en traction-compression (Tr, $R = -1$), certaines éprouvettes tubulaires cassent par flambement dans le congé. N'ayant pas plus d'information à notre disposition, nous faisons le choix de passer outre ces quelques exceptions, et nous considérons que la zone critique (où s'amorcent les fissures de fatigue) est toujours située dans la zone utile des éprouvettes.

De façon cohérente avec d'autres travaux publiés sur la fatigue des thermoplastiques renforcés en fibres de verre courtes, nous constatons que la dispersion des résultats publiés par De Monte et al. [53] et Klimkeit [112] est faible, en particulier si on la compare avec celle classiquement observée sur les matériaux métalliques. Ce point est illustré sur la figure 8.2, où sont rassemblés les résultats de Klimkeit. Dans la suite de ce chapitre et pour faciliter la lecture, les résultats expérimentaux correspondant au même cas de chargement ne seront représentés qu'à l'aide d'un seul point, qui représente la moyenne logarithmique des durées de vie expérimentales.

### 8.1.3 Simulation numérique

Nous déterminons la réponse cyclique du matériau à l'aide du modèle de comportement non linéaire anisotrope développé dans la partie I de ce manuscrit. Les chargements appliqués en fatigue




(a) $R = 0$ (b) $R = -1$

FIGURE 8.2 – Résultats expérimentaux des essais de fatigue sur le matériau conditionné (RH50, 23 ˚C), d'après Klimkeit [112], pour deux rapports de charge. L'axe vertical représente l'amplitude de la contrainte nominale appliquée (c'est-à-dire $\sigma_{11}$ pour les cas de traction simple Tr‖ et Tr, $\sigma_{22}$ pour Tr⊥. Dans le cas de chargement combinés de traction-torsion (2Tr∝To), le cisaillement $\tau_{12} = \lambda_2\sigma_{11}$ est superposé à la contrainte de traction $\sigma_{11}$ ; $\tau_{12}$ est affiché à la place de $\sigma_{11}$ dans le cas de torsion pure To. Enfin, il faut ajouter à $\sigma_{11}$ la contrainte circonférentielle $\sigma_{22} = \lambda_1\sigma_{11}$ dans le cas des éprouvettes tubulaires).

sont ceux étudiés par Klimkeit et De Monte. Bien que les grades de thermoplastiques soient différents du matériau de notre étude, nous considérons que les coefficients du modèle identifiés dans les conditions (23 ˚C, RH50) et (23 ˚C, DAM) peuvent être utilisés. Nous ne simulons pas la réponse de l'éprouvette dans son ensemble, mais seulement d'un élément de volume représentatif de la zone utile des éprouvettes tubulaires ou plates. Cette démarche est valide puisque la zone utile est également la zone d'amorçage en fatigue. Le tenseur d'orientation d'ordre deux a été caractérisé pour les deux microstructures. Le chargement mécanique local est multiaxial, et peut être formalisé à l'aide d'une évolution périodique du tenseur des contraintes sous la forme :

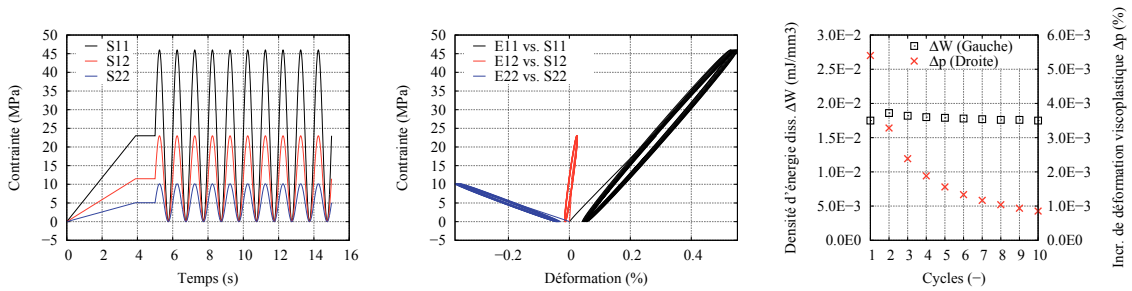
$$\underline{\underline{\sigma}}(t) = \begin{bmatrix} \sigma_{11}^m + \sigma_{11}^a \times \sin(2\pi f t) & \tau_{12}^m + \tau_{12}^a \times \sin(2\pi f t + \delta) & 0 \\ \tau_{12}^m + \tau_{12}^a \times \sin(2\pi f t + \delta) & \sigma_{22}^m + \sigma_{22}^a \times \sin(2\pi f t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{8.3}$$

où les exposants $m$ et $a$ indiquent respectivement la valeur moyenne et l'amplitude de chaque composante et $f$ est la fréquence du chargement.

La figure 8.3 montre que 10 cycles sont suffisants pour atteindre un régime stationnaire au calcul. Des simulations ont été poursuivies jusqu'à 100 cycles, ce qui a permis de vérifier que la réponse du cycle n°10 peut être considérée comme « stabilisée » (selon le sens précisé au chapitre 7). Dans la suite de notre étude, toutes les grandeurs mécaniques sont donc évaluées sur le dixième cycle, et sont supposées être représentatives de la réponse du matériau durant le chargement de fatigue.

## 8.2 Application des critères classiques

Les critères de fatigue présentés en section 7.1.3 sont complétés par la proposition d'un critère de Tsai-Hill modifié, synthèse entre le critère de Tsai-Hill appliqué à la fatigue et l'approche en plan critique. Chacun de ces critères est appliqué à l'ensemble des essais présentés par De Monte et al. [53] et Klimkeit [112], de façon à évaluer le(s)quel(s) permet(tent) une bonne corrélation avec la durée de vie expérimentale.




(a) Signaux de contraintes (b) Réponse en contrainte-déformation (c) Évolution cyclique

FIGURE 8.3 – Exemple d'une histoire de chargement en contraintes appliquée au volume représentatif de la zone utile des éprouvettes tubulaires (23 °C, RH50), et réponse du modèle de comportement. Dans cet exemple, le rapport de charge $R$ est nul, les signaux de traction et de torsion sont en phase, à la fréquence 1 Hz. $\Delta p$ et $\Delta W$ sont définis à l'aide des équations 3.21 et 3.25.

### 8.2.1 Critère de Tsai-Hill modifié

Nous avons évoqué en section 7.4 la nécessité de reformuler le critère de Tsai-Hill à l'aide d'une expression faisant explicitement intervenir la microstructure locale. À partir de ce constat, nous proposons le critère de Tsai-Hill dit « modifié », détaillé ci-dessous, et dont l'idée directrice rappelle l'approche en plan critique.

Le tenseur de contraintes est exprimé dans le repère matériel local. Nous distinguons les différentes composantes de la contrainte dans ce repère : pour chaque orientation principale des fibres $\underline{u}_i$, nous considérons la contrainte axiale $\overline{\sigma}_{ii}$, les contraintes transverses $\overline{\sigma}_{jj}$ $(j \neq i)$, et les cisaillements longitudinaux $\overline{\sigma}_{ij}$ $(j \neq i)$. Toutes ces composantes sont pondérées par l'intensité $a_i$ de la distribution d'orientation selon chacune des directions principales, ce qui permet de formuler la grandeur physique intervenant dans le critère de Tsai-Hill modifié selon :

$$G_{\text{T-H}}(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{a}}^{\psi}) = \sqrt{\underline{\underline{\sigma}} : \mathbb{M}(\underline{\underline{a}}^{\psi}) : \underline{\underline{\sigma}}} \tag{8.4}$$

$\mathbb{M}$ est un tenseur d'ordre 4, conforme à celui proposé par Hill [90], orthotrope avec pour axes principaux d'orthotropie $(\underline{u}_i)_{i=1,2,3}$. Ses coefficients dépendent de l'intensité de l'orientation dans ces directions, $a_i$, ainsi que de trois coefficients $\sigma_{\text{longi}}$, $\sigma_{\text{transv}}$ et $\tau_{\text{longi}}$ qui modélisent la résistance d'une microstructure UD selon les trois modes d'endommagement élémentaires (traction dans la direction des fibres, dans la direction transverse, ou cisaillement dans la direction des fibres). Ce critère ne décrit pas naturellement une sensibilité au rapport de charge, ce qui signifie que ce jeu de trois paramètres doit être identifé pour $R$=0 et $R$=-1 par exemple. $\mathbb{M}$ s'écrit finalement :

$$\mathbb{M}(\underline{\underline{a}}^{\psi}) = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} & 0 & 0 & 0 \\ M_{12} & M_{22} & M_{23} & 0 & 0 & 0 \\ M_{13} & M_{23} & M_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M_{66} \end{bmatrix}_{(\underline{u}_i)} \quad \text{et} \quad \underline{\underline{\sigma}} = \begin{Bmatrix} \overline{\sigma}_{11} \\ \overline{\sigma}_{22} \\ \overline{\sigma}_{33} \\ \overline{\sigma}_{12} \\ \overline{\sigma}_{13} \\ \overline{\sigma}_{23} \end{Bmatrix}_{(\underline{u}_i)} \tag{8.5}$$

où $M_{11} = a_1/\sigma^2_{\text{longi}} + (a_2 + a_3)/\sigma^2_{\text{transv}}$, $M_{44} = (a_1 + a_2)/\tau^2_{\text{longi}}$. $M_{22}$ et $M_{33}$ (resp. $M_{55}$ et $M_{66}$) sont obtenus par permutation circulaire des indices $i$ à partir de l'expression de $M_{11}$ (resp. $M_{33}$). $M_{12}$, $M_{13}$ et $M_{23}$ sont déterminés à l'aide des relations $M_{i1} + M_{i2} + M_{i3} = 0$ pour $i = 1,\ 2,\ 3$. Remarquons

que la quantité $G_{\mathrm{T-H}}$ est sans dimension. Le critère de Tsai-Hill modifié s'écrit à l'aide d'une loi puissance [2] :

$$G_{\mathrm{T-H}} \cdot N_r^b = 1 \tag{8.6}$$

Dans le cas d'un composite UD, la généralisation formulée ci-dessus s'identifie à l'expression proposée par De Monte et al. [54].

### 8.2.2 Méthodologie

Pour chaque critère de fatigue que nous avons testé, nous avons appliqué la même méthodologie. La réponse mécanique du matériau est calculée sur 10 cycles, à l'aide du modèle de comportement développé en partie I. Les grandeurs physiques $G_i$ sont post-traitées sur le dixième cycle : les tenseurs des contraintes et des déformations, leurs invariants, la contrainte viscoplastique équivalente, la densité d'énergie dissipée sur le cycle, l'incrément de déformation viscoplastique, etc. Quand un critère fait intervenir une combinaison de deux grandeurs physiques, par exemple sous la forme $G_1 + \alpha G_2$, où $\alpha$ est un paramètre, nous présentons les résultats avec la valeur optimale de $\alpha$ (c'est-à-dire la valeur qui permet la meilleure corrélation avec la durée de vie expérimentale).

Enfin, les différentes grandeurs physiques $G_i$ (ou leurs combinaisons éventuelles) sont tracées en fonction du nombre de cycles à rupture [3] $N_r$ soit dans un diagramme log-log ($\log G_i - \log N_r$) soit dans un diagramme lin-log ($G_i - \log N_r$), en fonction de la représentation qui semble la plus adaptée. Cela signifie que le critère sous-jacent est une relation en loi puissance ($G_i \cdot N_r^b = C$) ou bien une relation logarithmique ($\log N_r = (\Gamma - G_i)/b$). Le tableau 8.2 résume les différents critères que nous avons testés, et présente les valeurs des paramètres que nous avons identifiés. Cette identification est réalisée à partir d'une régression aux moindres carrés entre les valeurs prédites et mesurées du logarithme du nombre de cycles à rupture.

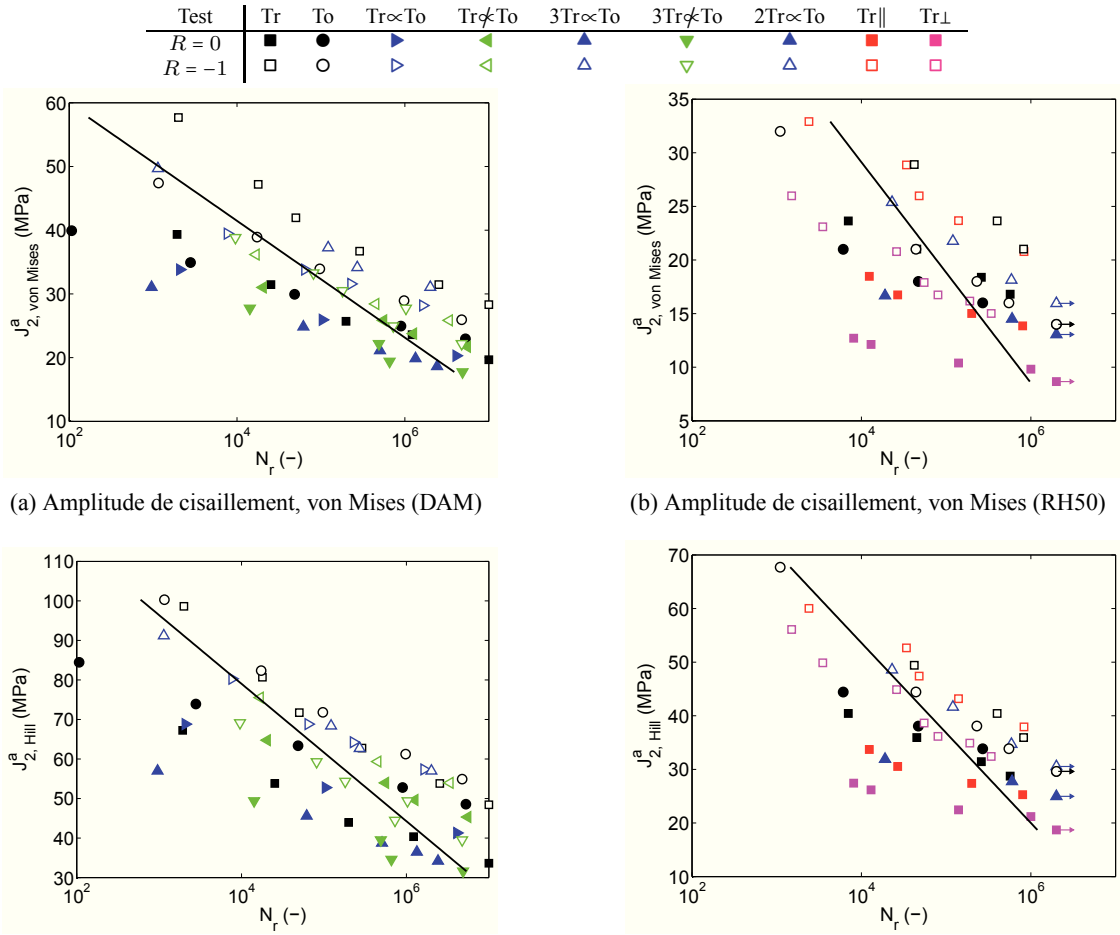
| Critère | DAM, 23 °C | RH50, 23 °C | Eq. |
|---|---|---|---|
| Cisaillement (von Mises) | $b$=9.16 MPa, $\sigma_0$=78.1 MPa | $b$=10.3 MPa, $\sigma_0$=70.3 MPa | 7.2, 7.3 |
| Cisaillement (Hill) | $b$=17.4 MPa, $\sigma_0$=148 MPa | $b$=16.7 MPa, $\sigma_0$=120 MPa | 7.2, 7.4 |
| Crossland | $\alpha$=0.440, $b$=16.3 MPa, $\sigma_0$=152 MPa | $\alpha$=0.392, $b$=16.3 MPa, $\sigma_0$=124 MPa | 7.5 |
| Sines | $\alpha$=1.04, $b$=13.2 MPa, $\sigma_0$=133 MPa | $\alpha$=0.970, $b$=12.7 MPa, $\sigma_0$=104 MPa | 7.6 |
| Dang Van | $\alpha$=0.118, $b$=8.94 MPa, $\sigma_0$=78.0 MPa | $\alpha$=0.153, $b$=10.4 MPa, $\sigma_0$=71.3 MPa | 7.7 |
| Tsai-Hill modifié ($R$ = 0) | $\sigma_{\mathrm{longi}}$ = 82.0 MPa, $\sigma_{\mathrm{transv}}$ = 55.2 MPa, $\tau_{\mathrm{longi}}$ = 43.3 MPa, $b$=0.117 | $\sigma_{\mathrm{longi}}$ = 193 MPa, $\sigma_{\mathrm{transv}}$ = 26.8 MPa, $\tau_{\mathrm{longi}}$ = 26.1 MPa, $b$=0.095 | 8.4,8.6 |
| Tsai-Hill modifié ($R$ = −1) | $\sigma_{\mathrm{longi}}$ = 207 MPa, $\sigma_{\mathrm{transv}}$ = 119 MPa, $\tau_{\mathrm{longi}}$ = 36.2 MPa, $b$=0.174 | $\sigma_{\mathrm{longi}}$ = 202 , $\sigma_{\mathrm{transv}}$ = 20.6 MPa, $\tau_{\mathrm{longi}}$ = 15.4 MPa, $b$=0.102 | 8.4,8.6 |
| Contrainte principale | $b$=31.4 MPa, $\sigma_0$=210 MPa | $b$=27.5 MPa, $\sigma_0$=166 MPa | 7.8 |
| Déformation principale | $b$=2.37e-3, $\varepsilon_0$=1.86e-2 | $b$=3.04e-3, $\varepsilon_0$=2.08e-2 | 7.9 |
| Manson-Coffin | $b$=1.81, $C$=343 | $b$=1.86, $C$=1.29e4 | 7.11 |
| Énergétique | $b$=0.559, $C$=0.493 mJ/mm$^3$ | $b$=0.650, $C$=25.3 mJ/mm$^3$ | 7.13 |
| Amiable | $\alpha$=-4.04e-7, $b$=0.555, $C$=0.524 mJ/mm$^3$ | $\alpha$=1.34e-4, $b$=0.562, $C$=11.0 mJ/mm$^3$ | 7.15 |
| Énergétique modifié | $\alpha$=11.5, $b$=0.394, $C$=0.601 mJ/mm$^3$ | $\alpha$=0.055, $b$=0.691, $C$=2.85 mJ/mm$^3$ | 7.17 |
| Klimkeit | $b$=0.184, $C$=8.05 mJ/mm$^3$ | $b$=0.226, $C$=6.10 mJ/mm$^3$ | 7.19 |

TABLE 8.2 – Paramètres des critères oligo- et polycycliques testés dans cette étude, pour les deux conditions environnementales. Les valeurs de certains paramètres peuvent ne pas avoir de sens physique si le critère associé n'est pas pertinent.

2. Une écriture avec une loi logarithmique serait également envisageable.
3. Rappelons que nous confondons le nombre de cycles à rupture et à amorçage.

### 8.2.3 Critères polycycliques

Sur les figures 8.4a et 8.4b, nous avons tracé le nombre de cycles à rupture $N_r$ en fonction de l'amplitude de cisaillement mesuré par la norme isotrope de von Mises, pour les deux conditions environnementales (DAM et RH50). Tout comme l'avait déjà fait remarquer Klimkeit [112], le critère de von Mises n'est pas bien corrélé avec la durée de vie $N_r$ sur le matériau conditionné. Nous confirmons cette observation sur le matériau sec. Sur les figures 8.4c et 8.4d, l'amplitude de cisaillement est évaluée à l'aide de la norme anisotrope de Hill. Manifestement, cette modification qui vise à prendre en compte l'influence de la microstructure dans le critère de fatigue n'est pas suffisante. Néanmoins, nous constatons que la norme de Hill permet de mieux réunir les essais réalisés à $R = -1$ (pression hydrostatique moyenne nulle) avec les essais de torsion (pression hydrostatique nulle) que le critère de von Mises. C'est la raison pour laquelle la norme de Hill sera utilisée dans la suite pour les critères faisant intervenir une mesure de l'amplitude de cisaillement.




(a) Amplitude de cisaillement, von Mises (DAM)

(b) Amplitude de cisaillement, von Mises (RH50)

(c) Amplitude de cisaillement, Hill (DAM)

(d) Amplitude de cisaillement, Hill (RH50)

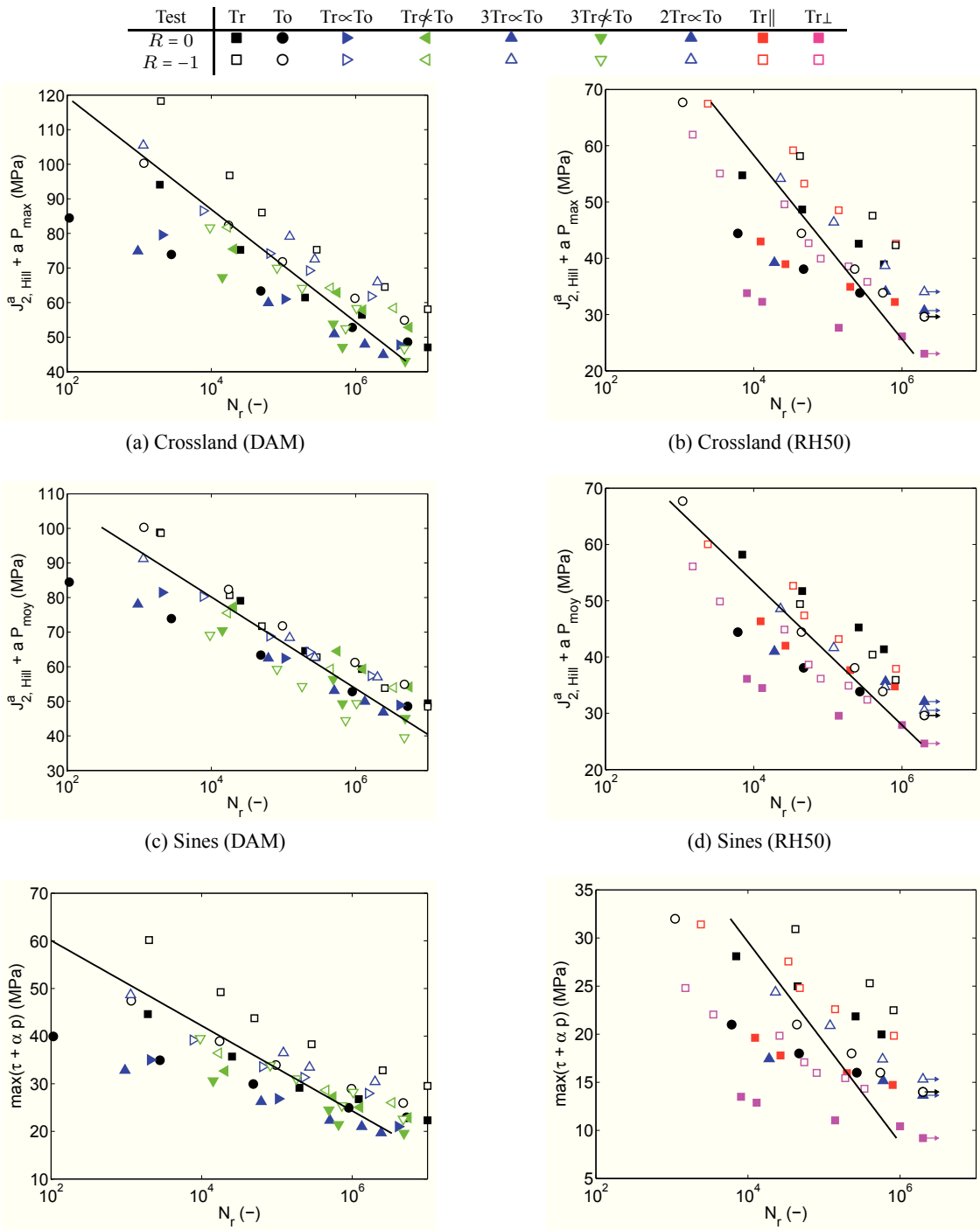
FIGURE 8.4 – Résultats obtenus avec les critères en amplitude cisaillement à partir des essais de De Monte (23 °C, DAM - gauche) et de Klimkeit (23 °C, RH50 - droite). Les deux points affichés à $N_r = 10^7$ sur le matériau sec (à gauche) sont des essais non-rompus.

Une amélioration possible en vue de tenir compte de l'influence de la contrainte moyenne est de combiner la mesure de l'amplitude de cisaillement avec une mesure de la pression hydrostatique. La figure 8.5 permet ainsi d'évaluer les performances des trois critères de Crossland, Sines et Dang Van, qui répondent à cet objectif. Le critère de Sines offre les résultats les plus intéressants parmi ces trois critères, puisqu'il permet de conserver la bonne corrélation obtenue avec la norme de Hill sur les essais de torsion et les essais alternés. Les critères de Crossland et de Dang Van ne semblent pas être adaptés à la description de la fatigue multiaxiale du P66-GF35. Le critère de Sines est relativement prédictif pour le matériau à l'état DAM, mais beaucoup moins pour le matériau conditionné (RH50). Par ailleurs, nous remarquons que les essais qui mettent le plus en défaut ce critère sont les essais de traction réalisés sur les éprouvettes prélevées dans les plaques à 90°. Il est possible que le critère de Sines soit adapté à la prédiction de la durée de vie en fatigue sous chargements multiaxiaux, mais ne permette pas de décrire la sensibilité aux variations de microstructure.

Le critère de Tsai-Hill modifié n'est pas conçu pour décrire les chargements multiaxiaux. Il est en effet construit comme une extension du critère de Tsai-Hill généralisé à la fatigue, selon la philosophie des approches en plan critique pour les matériaux orthotropes ; ce critère est donc plutôt adapté pour tenir compte de l'influence de la distribution d'orientation des fibres et de la direction du chargement. La figure 8.6 présente les résultats obtenus pour les matériaux DAM et RH50. Comme la littérature montre en outre que ce type de critère ne décrit pas la sensibilité au rapport de charge, nous l'identifions séparément sur les essais de chargement répété ou alterné. Comme nous pouvions nous y attendre, ce critère permet de corréler relativement bien les essais obtenus sur des microstructures différentes (voir les résultats obtenus à partir des essais de Klimkeit sur les éprouvettes tubulaires ou plates à 0° et 90°). En revanche, il ne permet pas de tenir compte de l'influence du déphasage entre les signaux de traction et de torsion. En outre, la nécessité (flagrante sur les essais de De Monte) d'identifier ce modèle pour chaque rapport de charge rend son utilisation coûteuse et peu aisée.

Les derniers critères que nous avons évoqués pour la fatigue multiaxiale polycyclique sont construits sur les amplitudes de contraintes ou de déformation. Les résultats sont présentés sur la figure 8.7. Ainsi que Klimkeit [112] l'a déjà relevé, le critère en amplitude de contrainte principale maximale ne permet pas une bonne corrélation avec les durées de vie expérimentales pour le matériau conditionné ; nous montrons qu'il en est de même pour le matériau sec.

Le critère en amplitude de déformation principale maximale n'est pas convaincant non plus en conditions DAM. Par contre, il permet de rassembler les résultats des essais alternés ($R = -1$) pour le matériau RH50. De façon à unifier les résultats avec les essais réalisés à $R = 0$, nous avons essayé d'appliquer une correction à l'aide d'une mesure de la pression hydrostatique (sur le même principe que pour les critères de Crossland ou de Sines). Les résultats n'étant pas sensiblement meilleurs, nous considérons que l'amplitude de déformation n'est pas un critère pertinent pour la fatigue multiaxiale, bien que les résultats de Mourglia Seignobos [148] en fassent un critère intéressant pour décrire naturellement la sensibilité aux conditions hygrothermiques.




(a) Crossland (DAM)

(b) Crossland (RH50)

(c) Sines (DAM)

(d) Sines (RH50)

(e) Dang Van (DAM)

(f) Dang Van (RH50)

FIGURE 8.5 – Résultats obtenus pour les critères de fatigue polycyliques combinant l'amplitude de cisaillement et la pression hydrostatique

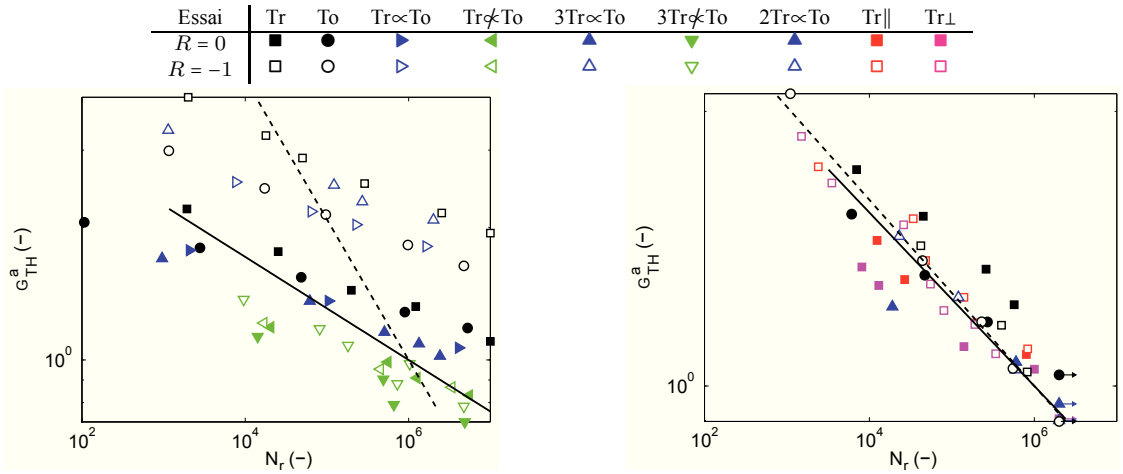
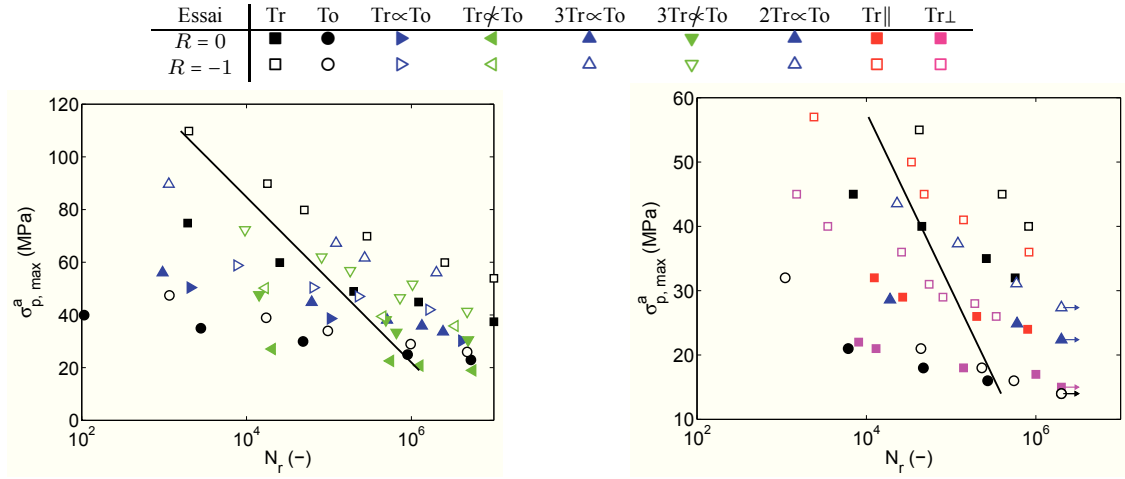
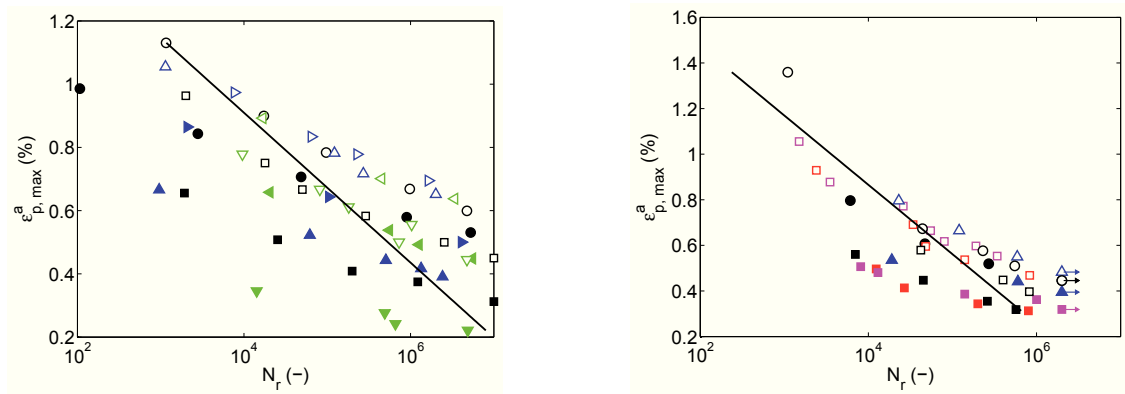



FIGURE 8.6 – Résultats obtenus pour le critère de Tsai-Hill modifié. Le critère est identifié séparément pour les essais à $R = 0$ (ligne continue) et $R = -1$ (tirets).




(a) Amplitude de contrainte princ. max. (DAM)

(b) Amplitude de contrainte princ. max. (RH50)




(c) Amplitude de déformation princ. max. (DAM)

(d) Amplitude de déformation princ. max. (RH50)

FIGURE 8.7 – Résultats obtenus pour les critères construits en amplitude de contrainte ou de déformation principale maximale.

### 8.2.4 Critères oligocycliques

Parmi les critères oligocycliques, le critère de Manson-Coffin est couramment employé pour les matériaux métalliques. Néanmoins, comme l'illustre la figure 8.8, ce critère ne semble pas être pertinent pour le polyamide renforcé, que ce soit à l'état sec ou conditionné. Même pour les durées de vie les plus courtes, pour lesquelles ce critère devrait être le plus approprié, l'amplitude de l'incrément de déformation viscoplastique n'est pas bien corrélée à la durée de vie en fatigue (malgré un accord correct pour les essais alternés). Enfin, le modèle de comportement prédit de très faibles valeurs de $\varepsilon^a_{vp}$ aux niveaux d'effort les plus bas : de telles valeurs ne sont pas suffisamment représentatives pour pouvoir servir d'indicateur de l'endommagement en fatigue.

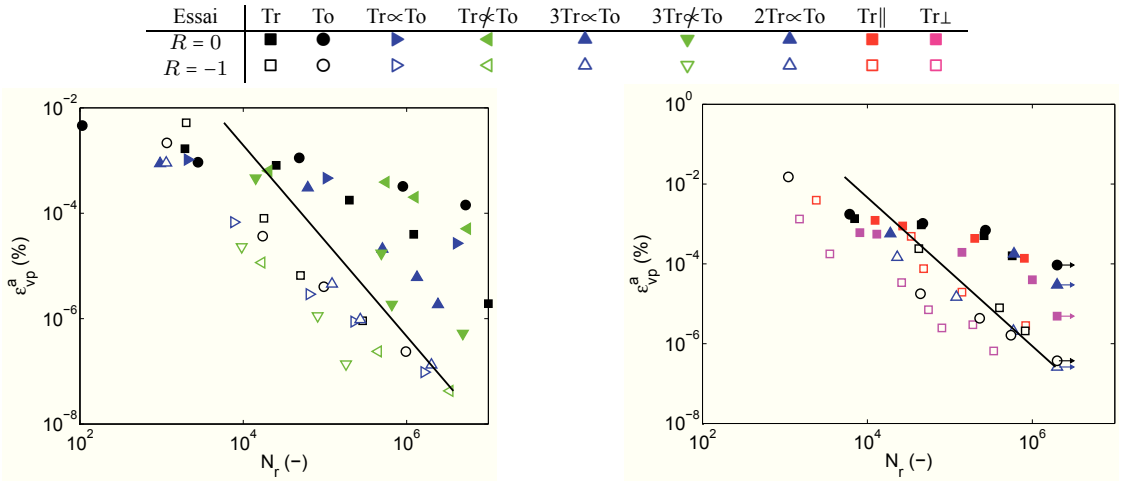
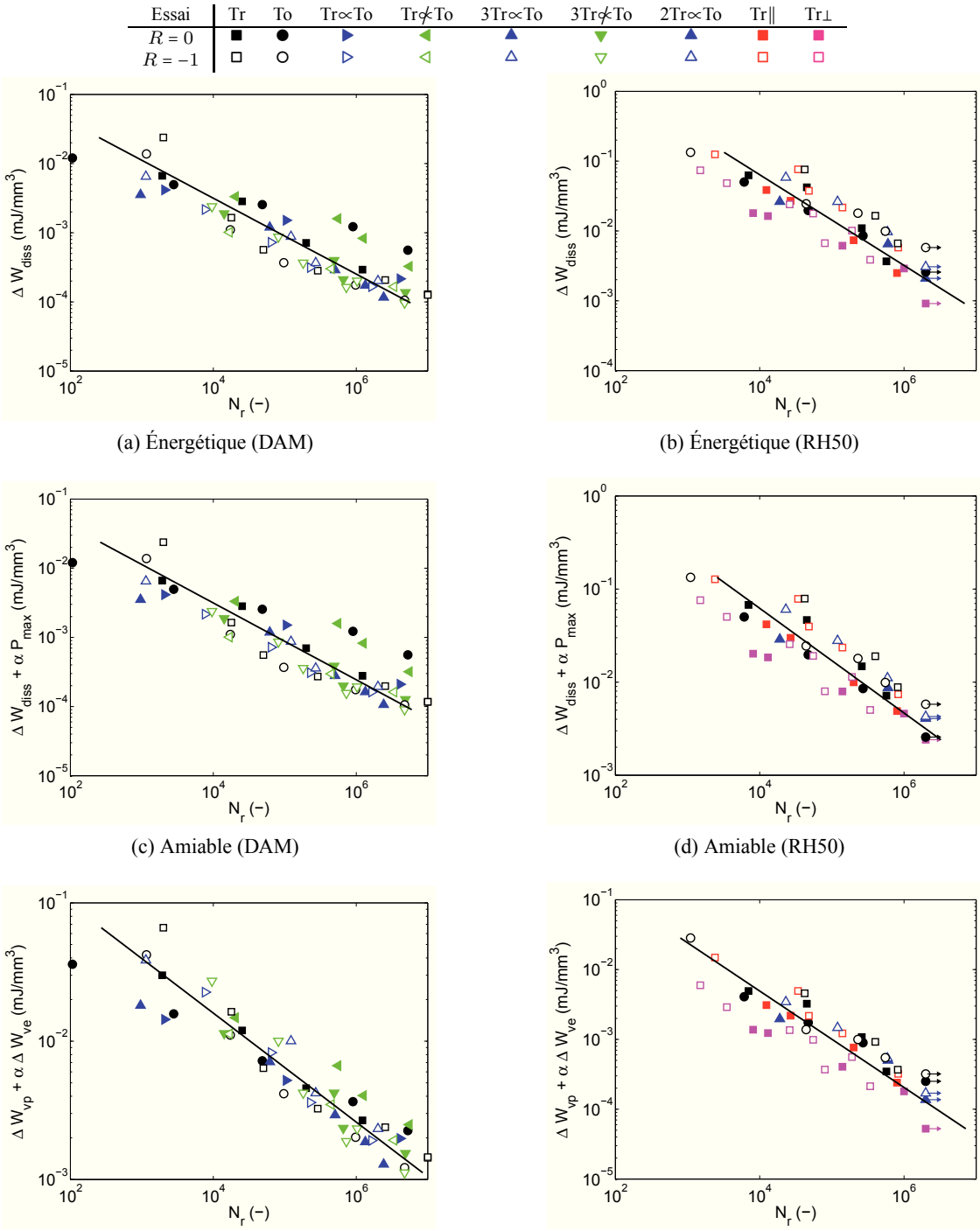



FIGURE 8.8 – Résultats obtenus pour le critère de Manson-Coffin, sur matériau à l'état DAM (gauche) et RH50 (droite), à 23 °C.

La figure 8.9 montre les résultats obtenus à partir du critère énergétique et de ses variantes. Tout d'abord, nous remarquons une bonne corrélation à la fois dans le cas DAM et dans le cas RH50 lorsque la densité d'énergie dissipée par cycle $\Delta W_{\text{diss}}$ est représentée en fonction du nombre de cycles à rupture. Une analyse plus minutieuse des résultats montre que les essais pour lesquels la corrélation est la moins bonne sont ceux où les éprouvettes tubulaires à l'état DAM sont soumis à de fortes torsions (essais To et Tr∝̸To). Par ailleurs, le critère énergétique sur-estime systématiquement la durée de vie des éprouvettes plates découpées à 90° à l'état RH50.

Le critère d'Amiable [5] est une variante du critère énergétique qui permet de modéliser une sensibilité à la pression hydrostatique. Dans notre étude, le critère en densité d'énergie dissipée semble cependant être indépendant de la pression hydrostatique, que ce soit pour les essais de Klimkeit ou de De Monte. Le critère d'Amiable ne permet donc pas une corrélation significativement meilleure que le critère énergétique simple, ce qui est cohérent avec les faibles valeurs identifiées pour le paramètres $\alpha$.

Enfin, le critère énergétique modifié est une extension du critère énergétique qui permet de distinguer l'influence des mécanismes dissipatifs viscoélastiques ou viscoplastiques. Une légère amélioration de la prédictivité du critère est constatée, notamment en ce qui concerne le matériau à l'état DAM. Le coefficient de pondération $\alpha$ identifié a une valeur relativement élevée (voir le tableau 8.2), ce qui montre que l'énergie dissipée par mécanismes viscoélastiques peut servir d'indicateur de l'endommagement en fatigue. Nous pouvons mettre ce résultat en parallèle avec le fait bien connu sur les




(a) Énergétique (DAM)

(b) Énergétique (RH50)

(c) Amiable (DAM)

(d) Amiable (RH50)

(e) Énergétique modifié (DAM)

(f) Énergétique modifié (RH50)

FIGURE 8.9 – Résultats obtenus pour le critère énergétique et ses variantes.

matériaux métalliques qu'une réponse élastique (adaptée) à l'échelle macroscopique peut être dissipative (élastoplastique notamment) à l'échelle microscopique ; la source de dissipation locale peut servir d'indicateur de l'endommagement en fatigue [169]. Dans le cas des matériaux polymères, la réponse apparente est plutôt viscoélastique aux faibles niveaux d'efforts, mais le raisonnement est analogue : des mécanismes non recouvrables peuvent être activés à l'échelle microscopique et être à l'origine de l'endommagement en fatigue. Par ailleurs, nous avons pu vérifier que l'énergie dissipée par mécanismes uniquement viscoplastiques n'est pas bien corrélée à $N_r$ sur une gamme de durées de vie aussi large.

## 8.3 Discussion : vers un critère énergétique

### 8.3.1 Performances des différents critères testés

En ce qui concerne les critères polycycliques, nous constatons tout d'abord que la mesure de l'amplitude de cisaillement n'est pas bien corrélée à la durée de vie en fatigue. La prise en compte de la pression hydrostatique moyenne (critère de Sines avec une norme anisotrope de Hill sur le cisaillement) permet une amélioration significative de la prédictivité du critère sur le matériau sec, mais pas sur le matériau conditionné.

Le critère en amplitude de contrainte principale maximale n'est pas pertinent pour le PA66-GF35 ; à ce sujet, les conclusions des travaux de Klimkeit et al. [114] sur le PBT+PET-GF30 tendent à montrer que cette conclusion s'applique de façon générale aux thermoplastiques chargés. Le critère en amplitude de déformation principale maximale n'est pas non plus adéquat pour décrire les effets multiaxiaux.

Le critère de Tsai-Hill modifié nécessite un grand nombre de paramètres (en raison d'une identification nécessaire pour chaque rapport de charge), et pourtant ne permet pas de tenir compte du déphasage des signaux d'effort. Ce critère n'est pas utilisé tel quel dans la littérature, mais sa forte analogie avec le critère de Tsai-Hill (généralisé à la fatigue) ou avec les approches en plan critique signifie que les bons résultats publiés par De Monte et al. [54] (ainsi que la mise en œuvre industrielle proposée par Gaier et al. [75]) ont un domaine de validité limité, et ne peuvent pas décrire des chargements multiaxiaux (en particulier avec des voies d'effort déphasées).

Le critère oligocyclique de Manson-Coffin n'est pas pertinent dans le cas du PA66-GF35, notamment en raison de la faible activation des mécanismes viscoplastiques lorsque les chargements sont peu élevés.

En revanche, la densité d'énergie dissipée par cycle offre une corrélation intéressante avec la tenue en fatigue, que ce soit pour le matériau sec ou conditionné, et ce sur une large gamme de durées de vie. Le critère énergétique décrit naturellement la sensibilité au rapport de charge, à la microstructure locale ou aux effets de multiaxialité. En outre, les essais qui sont le moins bien décrits par le critère sont également ceux pour lesquels la validité de la réponse mécanique peut être sujette à caution. En effet, les essais où la torsion est importante impliquent un fort taux de cisaillement local ; cependant la base d'identification du comportement (voir le chapitre 3) ne comporte pas d'essais de cisaillement, ce qui explique que la modélisation des composantes viscoplastiques ou viscoélastiques de la déformation en cisaillement soit perfectible [4]. D'autre part, les essais sur les éprouvettes de traction plates

4. Les coefficients du tenseur $\mathbb{P}$ décrivant l'interaction cisaillement-cisaillement coefficients ont été fixés arbitrairement à $(2/3)^k$, en raison de la condition selon laquelle $\mathbb{P}$ doit être proportionnel à $\mathbb{K}$ pour une microstructure isotrope (voir le chapitre 5). Mais cette hypothèse devrait être étayée ou corrigée à l'aide d'essais complémentaires.

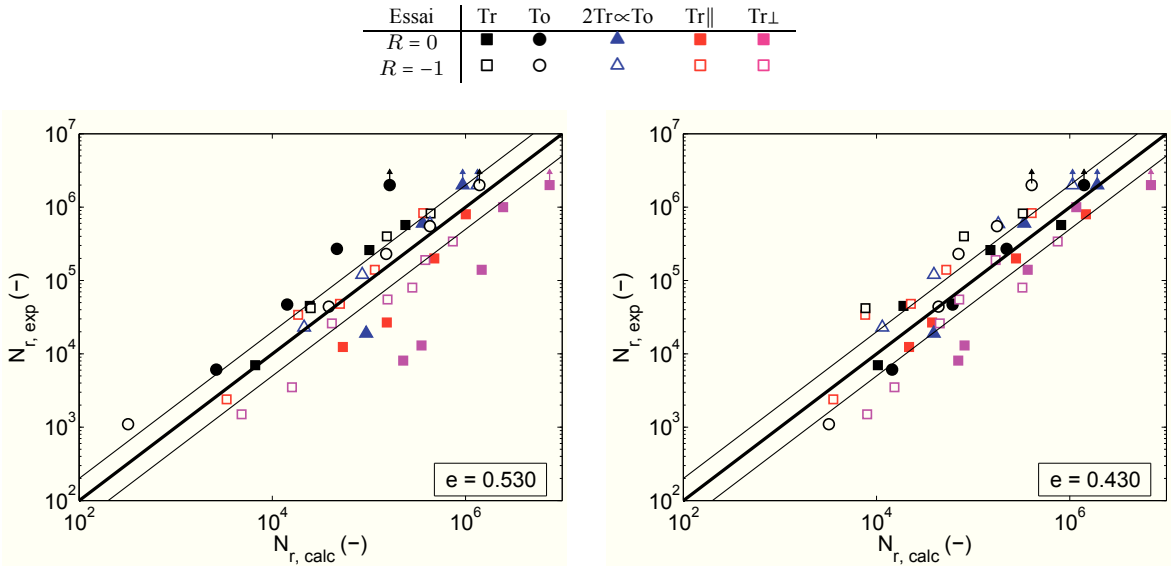
transverses sont simulés avec l'hypothèse d'isotropie des composantes de la déformation viscoélastique, hypothèse que nous avons déjà mentionnée comme étant potentiellement source d'erreur sur la réponse mécanique (voir le chapitre 5).

Enfin, les extensions du critère énergétique ne présentent pas d'amélioration significative sur la prédiction de la durée de vie pour justifier l'introduction d'un paramètre supplémentaire.

### 8.3.2 Comparaison avec le critère de Klimkeit

Nous avons déjà évoqué le fait que le critère en densité d'énergie élastique proposé par Klimkeit [112] (Eq. 7.19) constitue, à notre connaissance, le seul critère de fatigue multiaxiale publié à ce jour pour les thermoplastiques renforcés en fibres de verre courtes. Les résultats de ce critère sont donc comparés aux résultats obtenus à l'aide du meilleur des critères testés ci-dessus, c'est-à-dire le critère énergétique fondé sur l'énergie dissipée par cycle.

Cette comparaison est tout d'abord présentée sur la base d'essais de Klimkeit, à partir de laquelle le critère en densité d'énergie élastique de déformation a été formulé [5]. Les deux critères nécessitent l'identification de deux paramètres seulement. Nous constatons sur la figure 8.10 que le critère proposé est globalement plus prédictif sur l'ensemble des cas de chargement testés. L'erreur $e$ affichée est la moyenne quadratique des écarts logarithmiques entre la durée de vie prédite et la durée de vie mesurée. Le fait que le critère de Klimkeit soit apparemment bien meilleur pour les essais à $R = -1$ que pour ceux à $R = 0$ est un artefact : de façon à retrouver les résultats de Klimkeit [112], nous avons identifié les paramètres du critère en densité d'énergie élastique uniquement à partir des essais alternés (pour lesquels $f = 1$), selon la procédure proposée par l'auteur. Cette remarque ne remet cependant pas en cause la comparaison réalisée.




(a) Critère de Klimkeit : densité d'énergie élastique $f\Delta W_e$

(b) Critère proposé : densité d'énergie dissipée $\Delta W_{\text{diss}}$

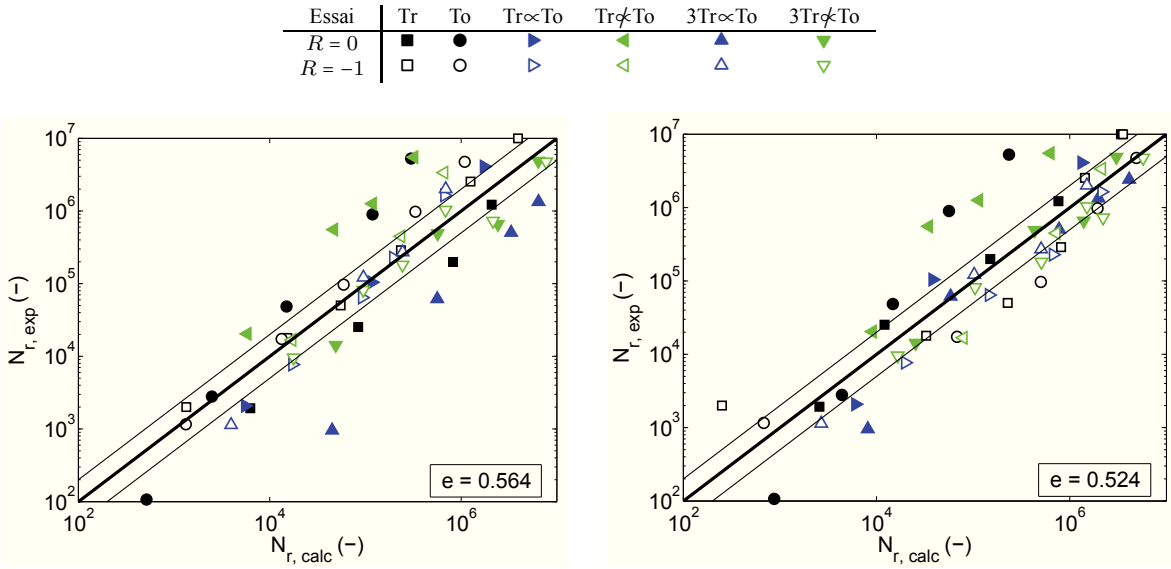
FIGURE 8.10 – Comparaison entre les résultats du critère proposé par Klimkeit et al. [114] avec le critère énergétique (conditions RH50, 23 °C).

5. Nous avons calculé la densité d'énergie élastique $\Delta W_e$ pondérée par la fonction $f$, les résultats obtenus sont très proches de ceux présentés par Klimkeit et al. [114]. Les légères différences peuvent s'expliquer par l'emploi de l'équation de fermeture orthotrope tandis que les auteurs utilisent une fermeture hybride, ainsi que par le calcul des coefficients du critère : régression à partir de la moyenne logarithmique des durées de vie pour les essais répétés, et non à partir des valeurs individuelles.

La figure 8.11 présente la comparaison du critère de Klimkeit et du critère énergétique sur la base d'essais de De Monte [6]. Nous constatons une meilleure corrélation avec le critère proposé, même si le critère de Klimkeit est également satisfaisant, ce qui peut s'expliquer par le caractère faiblement dissipatif du matériau en conditions DAM à température ambiante.

Comme nous l'avons déjà mentionné en section 7.4, le rapport de charge $R$ intervenant dans l'équation 7.19 est ambigu pour les essais déphasés. En effet, nous avons conservé la valeur identifiée séparément sur chaque voie d'effort (i.e. $R = 0$ ou $-1$), mais une autre définition aurait pu être adoptée (rapport entre les contraintes maximale et minimale normales à un plan donné par exemple), ce qui conduirait à des résultats différents. De même, Klimkeit [112] ne propose pas une expression de la densité d'énergie dissipée adaptée aux chargements multiaxiaux déphasés ; nous avons adopté la formulation $\Delta W_e = \int_{\text{cycle}} \left(\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}_e\right)^+ \mathrm{d}t$ où $(\cdot)^+$ signifie que l'on ne considère que la partie positive. D'autres définitions, notamment liées aux directions principales ou au repère matériel local, pourraient être choisies.

Au bilan, l'approche en énergie dissipée est plus performante que le critère en densité d'énergie élastique pour une grande variété de cas de chargements multiaxiaux, pour différentes microstructures et pour différentes conditions hygrothermiques, mais bénéficie également d'un caractère de généralité qui fait défaut au critère de Klimkeit.




(a) Critère de Klimkeit : densité d'énergie élastique $f\Delta W_e$

(b) Critère proposé : densité d'énergie dissipée $\Delta W_{\text{diss}}$

FIGURE 8.11 – Comparaison entre les résultats du critère proposé par Klimkeit et al. [114] avec le critère énergétique (conditions DAM, 23 °C).

### 8.3.3 Bilan

Nous avons montré que le critère énergétique permet d'obtenir la meilleure corrélation avec la durée de vie expérimentale sur l'ensemble des conditions d'essais étudiées par Klimkeit [112] et De Monte et al. [53]. Nous avons tout d'abord montré la supériorité de ce critère sur de nombreux autres critères généralement proposés dans la littérature, et nous avons ensuite établi qu'il permet de

6. Cette fois-ci, les paramètres du critère de Klimkeit sont identifiés sur l'ensemble de la base expérimentale.

meilleures prédictions que le critère de Klimkeit (lui-même inspiré des travaux de Kujawski et Ellyin [116]). Cette conclusion est valable sur une gamme de durées de vie couvrant plusieurs décades (de $10^3$ à $10^6$ cycles).

Ces résultats intéressants sont expliqués par l'emploi d'un modèle de comportement non linéaire alors que que la plupart de ceux utilisés dans la littérature pour les thermoplastiques renforcés en fibres de verre courtes sont élastiques linéaires. Nous avons ainsi fait le choix de décrire les mécanismes dissipatifs lors de chargements cycliques, ce qui permet d'avoir accès à des grandeurs physiques mieux corrélées aux mécanismes d'endommagement en fatigue. Ce chapitre nous permet donc de démontrer la pertinence de l'ensemble de l'approche de dimensionnement à la fatigue exposée dans ce manuscrit, qui repose sur la richesse du modèle de comportement phénoménologique.

Cependant, nous avons relevé quelques incertitudes dans l'analyse des essais de fatigue. Tout d'abord, il conviendrait de pouvoir garantir que l'identification des paramètres du modèle de comportement pour notre grade de PA66-GF35 peut être directement transposée aux autres grades utilisés par De Monte et Klimkeit. Par ailleurs, la fréquence d'essais exacte n'est pas connue, alors que ce paramètre a une forte influence sur l'aire d'hystérèse en raison des mécanismes viscoélastiques. Le champ tensoriel d'orientation des fibres est lui aussi sujet à quelques interrogations.

Nous avons donc été contraints d'émettre quelques hypothèses de façon à retraiter les essais de fatigue avec notre modèle de comportement. Elles ne remettent pas en cause le résultat principal de ce chapitre, qui établit la corrélation entre la tenue en fatigue et la densité d'énergie dissipée par cycle, mais elles expliquent qu'il soit nécessaire de le confirmer à l'aide d'essais réalisés sur le matériau de l'étude. De même, la levée de ces incertitudes pourrait permettre d'évaluer si les extensions proposées du critère de fatigue retenu, et notamment le critère énergétique modifié, peuvent en améliorer la prédictivité. La réponse à ces questions fait l'objet du chapitre 9.

# Chapitre 9

# Critère de fatigue énergétique

## Sommaire


**9.1 Identification du critère . . . . . 188**
9.1.1 Campagne expérimentale . . . . . 188
9.1.2 Indicateurs macroscopiques de l'endommagement . . . . . 189
9.1.3 Localisation de l'amorçage . . . . . 191
9.1.4 Application de différents critères de fatigue . . . . . 191
9.1.5 Discussion . . . . . 193
**9.2 Application et validation sur structures . . . . . 197**
9.2.1 Fractographie . . . . . 197
9.2.2 Stationnarité de la réponse mécanique . . . . . 197
9.2.3 Résultats expérimentaux . . . . . 198
9.2.4 Validation du critère énergétique . . . . . 200
9.2.5 Extension à d'autres conditions environnementales . . . . . 202
9.2.6 Bilan . . . . . 204
**9.3 Discussion autour du critère énergétique . . . . . 205**
9.3.1 Fatigue et histoire de chargement . . . . . 205
9.3.2 Vers un critère énergétique modifié ? . . . . . 208
9.3.3 Bilan sur le critère de fatigue proposé . . . . . 209


Ce chapitre débute par l'identification du critère de fatigue énergétique sur le matériau de l'étude, en conditions standard. Nous confirmons les conclusions du chapitre 8, en montrant à partir d'une nouvelle campagne expérimentale que la densité d'énergie dissipée par cycle permet une meilleure corrélation avec la durée de vie expérimentale que les autres grandeurs physiques généralement retenues dans la littérature pour témoigner de l'endommagement en fatigue. Nous montrons en outre que cette grandeur physique permet de prédire la localisation des zones critiques. Nous appliquons la démarche aux éprouvettes avec accident de forme dans différentes conditions environnementales, ce qui constitue un cas de validation sur structures. Nous concluons ce chapitre en envisageant une amélioration des résultats en utilisant le critère énergétique modifié, et discutons de la pertinence d'un tel approfondissement.

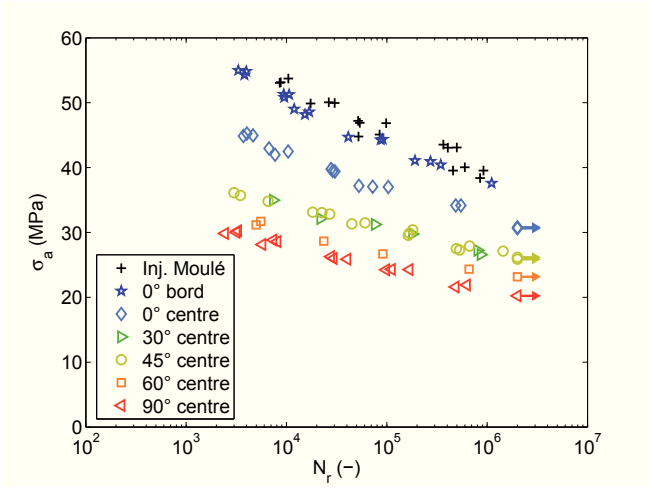



FIGURE 9.1 – Résultats des essais de fatigue sur les éprouvettes ISO527-2-5A moulées par injection et découpées dans des plaques injectées.

## 9.1 Identification du critère

### 9.1.1 Campagne expérimentale

Dans cette section, nous présentons une campagne expérimentale d'essais de fatigue menés sur le matériau de l'étude ; cette campagne a été réalisée par le CETIM pour PSA Peugeot Citroën. Les éprouvettes sont identiques à celles utilisées pour l'étude du comportement anisotrope (voir le chapitre 5), et sont présentées en annexe A.2.

#### a Conditions d'essais

Nous rappelons que les éprouvettes ont une géométrie conforme à la norme ISO527-2-5A. Sept microstructures différentes sont étudiées, puisque les éprouvettes sont soit moulées par injection, soit découpées dans des plaques injectées, sur le bord des plaques dans la direction du flux d'injection ou au centre des plaques à différentes angles $\alpha = 0°, 30°, 45°, 60°, 90°$ (voir la figure 5.9). Contrairement au chapitre 8, le grade de PA66-GF35 est le même que celui ayant servi à la caractérisation du comportement.

Les essais de fatigue sont réalisés en conditions standard ($T$=23 ˚C, $\mathcal{H}$=50 %). Une pesée avant et après essai permet de vérifier que la teneur en eau reste constante au cours des essais.

Le chargement mécanique appliqué est un signal sinusoïdal d'effort en traction répétée. Le rapport de charge $R$ est très légèrement positif (0.02) de façon à éviter tout risque de flambement, la fréquence d'essai $f$ s'échelonne entre 1 et 7 Hz. Les fréquences les plus élevées correspondent aux amplitudes d'effort les plus faibles. En outre, un système de ventilation est installé pour augmenter les pertes de chaleur par convection, et ainsi garantir un auto-échauffement négligeable, inférieur à 2 ˚C (la température de surface des éprouvettes est suivie au cours des essais à l'aide d'un thermocouple). La déformation est mesurée dans la zone utile des éprouvettes avec un extensomètre à couteaux.

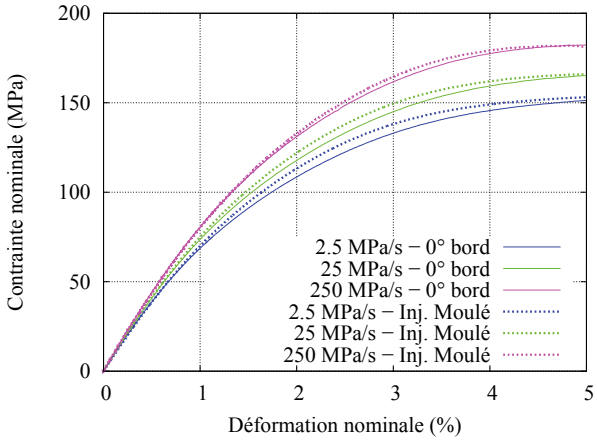



FIGURE 9.2 – Essais de traction monotone sur les éprouvettes ISO527-2-5A injectées moulées ou découpées à 0° sur le bord des plaques injectées.

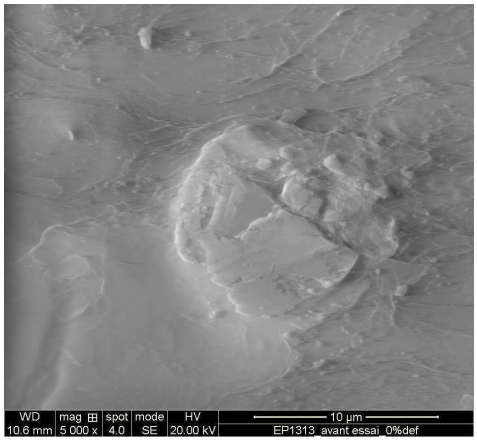



FIGURE 9.3 – Observation au MEB d'une fibre sur la tranche d'une éprouvette découpée, recouverte de matrice PA66.

### b Résultats expérimentaux

La figure 9.1 présente les résultats de cette campagne d'essai dans un diagramme $\sigma_a - \log N_r$. Les niveaux d'effort ont été choisis de façon à balayer une large gamme de durées de vie, depuis quelques milliers jusqu'à plusieurs centaines de milliers de cycles. En règle générale, les essais ont été triplés ; on constate que conformément aux résultats de la littérature pour les thermoplastiques renforcés en fibres de verre courtes, la dispersion expérimentale en termes de durée de vie est relativement faible [1].

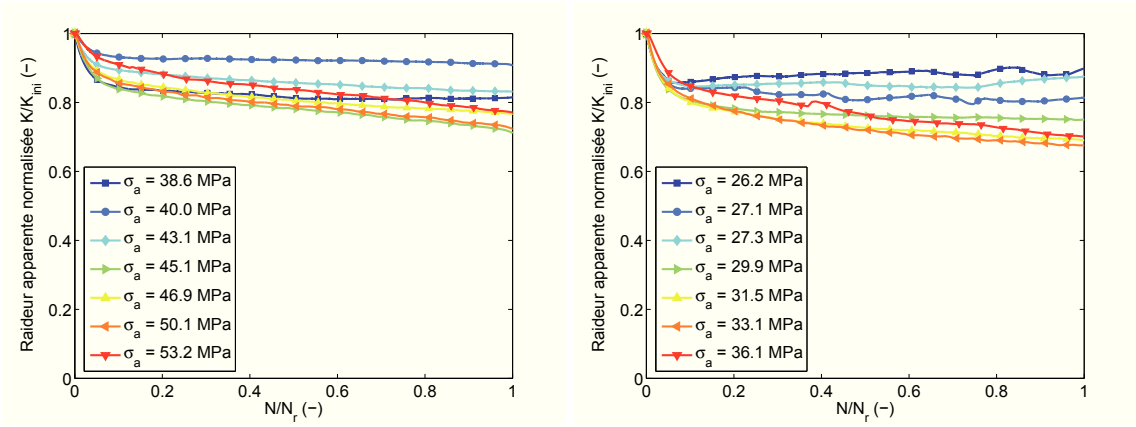
Nous pouvons constater sur la figure 9.2 que la réponse mécanique des éprouvettes injectées moulées ou découpées sur le bord des plaques est très proche, les deux microstructures présentant une distribution d'orientation fortement alignée selon la direction de chargement ($a_1 \sim 0.9$ dans les deux cas). Nous constatons sur la figure 9.1 que leur durée de vie (à niveaux d'effort égal) sont similaires [2], ce qui montre que le procédé de découpe des éprouvettes n'a pas d'influence majeure sur la tenue en fatigue. Ce résultat est intéressant, car il permet d'affirmer que les études menées à partir d'éprouvettes découpées dans des conditions *ad hoc* n'induisent pas d'artefact quant à l'analyse des résultats de fatigue. Comme l'illustre la figure 9.3, l'explication réside sans doute dans le fait que le fraisage des éprouvettes fait fondre superficiellement le polyamide, ce qui permet de re-créer une peau uniquement matricielle (comme lors de l'injection) : les sites d'amorçage créés en surface ne présentent donc pas une sévérité supérieure aux sites internes (endommagement « diffus »).

## 9.1.2 Indicateurs macroscopiques de l'endommagement

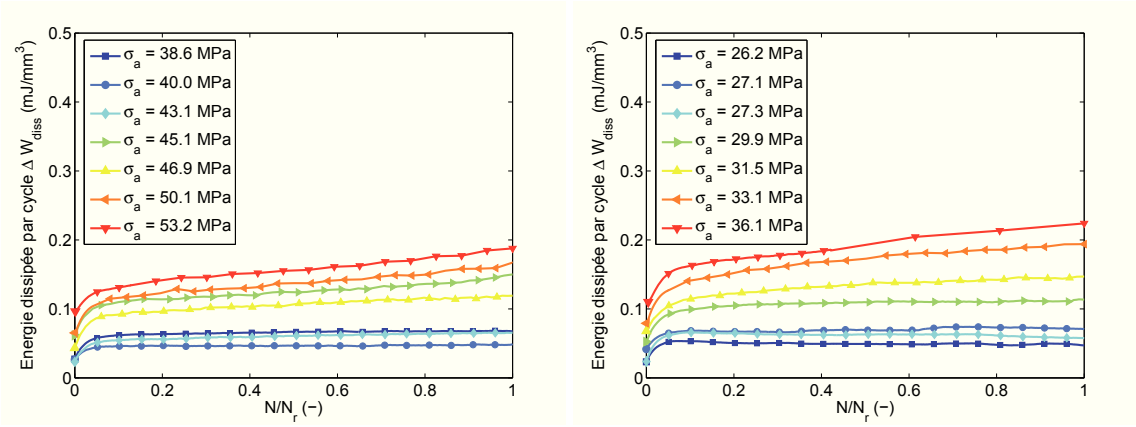
Les figures 9.4a, 9.4b et 9.4c présentent respectivement les suivis de raideur apparente, d'aire d'hystérèse et de déformation résiduelle au cours des essais de fatigue, pour différents niveaux de chargement. Nous ne présentons ici que les résultats pour les éprouvettes injectées moulées ou prélevées à 45° au centre des éprouvettes, mais nous retrouvons pour les sept microstructures les observations déjà formulées dans la littérature [54, 112, 150], à savoir :

1. Les sections utiles mesurées sont variables, autour de 8 mm$^2$, ce qui explique que des essais « répétés » à l'identique puissent être représentés par des valeurs légèrement différentes de $\sigma_a$.

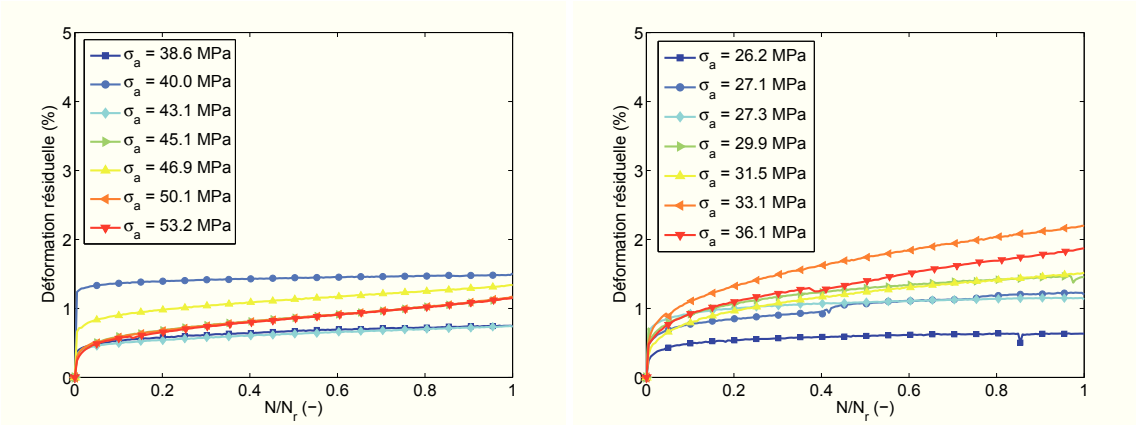
2. Les éprouvettes injectées moulées présentent une durée de vie légèrement supérieure, ce qui est cohérent avec le fait que leur réponse mécanique soit également un peu plus raide, en raison notamment d'une zone de cœur moins marquée.




(a) Raideur normalisée




(b) Aire d'hystérèse




(c) Déformation résiduelle

FIGURE 9.4 – Évolution de différentes grandeurs mécaniques macroscopiques au cours des essais de fatigue sur éprouvette ISO527-2-5A injectée moulée (gauche) ou prélevée à 45° (droite).

– la phase de propagation n'est pas détectable sur les suivis des grandeurs macroscopiques, et peut être négligée. L'amorçage est ainsi confondu avec la rupture de l'éprouvette dans la suite de ces travaux : $N_a \sim N_r$ ;
– nous pouvons considérer que la réponse mécanique est stationnaire après quelques centaines de cycles (sachant que 100 cycles sont nécessaires au début de chaque essai pour atteindre la consigne, en raison de la souplesse de l'asservissement électronique de la cellule d'effort).

Par ailleurs, des critères de rupture en déformation cumulée ou en chute de raideur ne semblent pas être pertinents, puisque la rupture de l'échantillon n'est pas associée à une valeur unique de déformation à rupture ou de chute de raideur.

La figure 9.5 permet d'approfondir la notion de stationnarité du comportement cyclique. En effet, la seule grandeur mécanique qui évolue de façon sensible au cours des cycles (une fois le régime stationnaire atteint) est la déformation résiduelle apparente. Comme nous l'avons déjà évoqué, ce phénomène est la conséquence d'un couplage fatigue-fluage [24] puisque la moyenne du signal de contrainte est positive [3], ce qui ne remet pas en cause le caractère stationnaire de la réponse mécanique. Les grandeurs mécaniques $G_i$ évoluent peu à partir du cycle n°100 et sont alors représentatives de l'ensemble du chargement ; pour éliminer les éventuels bruits de mesure, notre protocole de post-traitement prévoit le calcul d'une moyenne sur les cycles 100, 200, . . ., 1000.

### 9.1.3 Localisation de l'amorçage

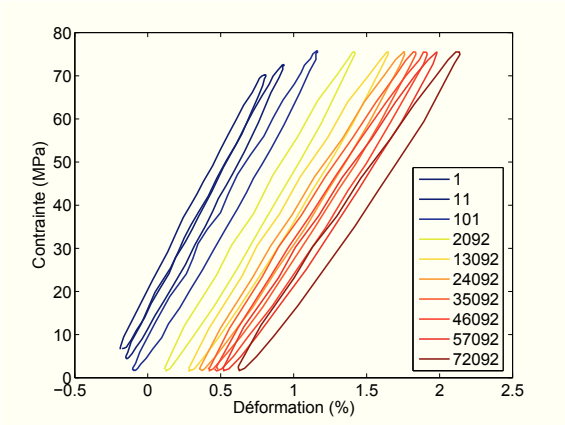
Les éprouvettes ISO527-2-5A cassent généralement au milieu de leur zone utile lorsqu'elles sont rompues sous chargement monotone. En revanche, lorsqu'elles sont sollicitées en fatigue, la rupture se produit soit dans le congé de raccordement entre la zone utile et le pied de l'éprouvette, soit dans la zone utile au voisinage de ce congé. Il est intéressant de montrer que la simulation numérique permet de retrouver ces résultats. Dans ce but, nous simulons 15 cycles de chargement en fatigue sur ces éprouvettes, et nous comparons les champs obtenus sur deux grandeurs mécaniques différentes : la contrainte équivalente viscoplastique $\mathcal{J}_{vp}$ d'une part, et l'énergie dissipée $\Delta W_{\text{diss}}$ d'autre part. Cette comparaison est faite à titre d'illustration sur une éprouvette injectée moulée (figure 9.6) et sur une éprouvette prélevée à 45° (figure 9.7).

Nous constatons que tandis que la dissipation d'énergie est effectivement concentrée au voisinage des congés de l'éprouvette, $\mathcal{J}_{vp}$ présente un champ relativement homogène dans la zone utile. L'énergie dissipée permet donc d'expliquer la localisation de l'amorçage d'une fissure en fatigue, tandis qu'une norme sur la contrainte [4] prédirait un amorçage aléatoire dans la zone utile. Par contre, nous pouvons supposer qu'un indicateur de la rupture sous chargement monotone devrait être quant à lui construit à partir d'une norme sur la contrainte, ce qui est cohérent avec la littérature qui propose généralement l'emploi d'une norme anisotrope de type Hill [90].

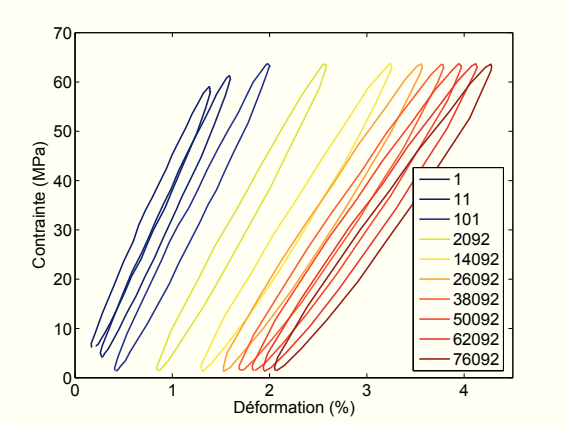
### 9.1.4 Application de différents critères de fatigue

Nous appliquons sur l'ensemble de la base expérimentale trois critères de fatigue parmi ceux que nous avons étudiés lors des deux chapitres précédents :
– le critère de Tsai-Hill modifié, qui est particulièrement adapté pour décrire la sensibilité à la microstructure et à l'orientation du chargement ;

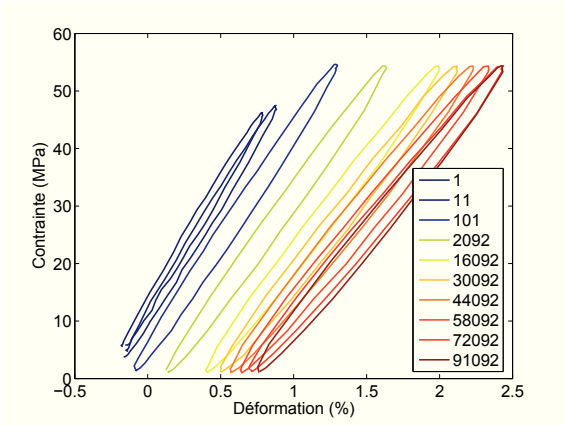
3. Ce point sera approfondi à l'aide d'essais complémentaires en section 9.2.2.
4. De façon rigoureuse, $\mathcal{J}_{vp}$ est une norme anisotrope sur la différence entre la contrainte effective $\underline{\underline{\sigma}}$ et la contrainte de rappel $\underline{\underline{X}}$. Néanmoins, l'affichage de $J_2$ construit à l'aide d'une norme de von Mises ou d'une norme de Hill renverrait un résultat similaire.



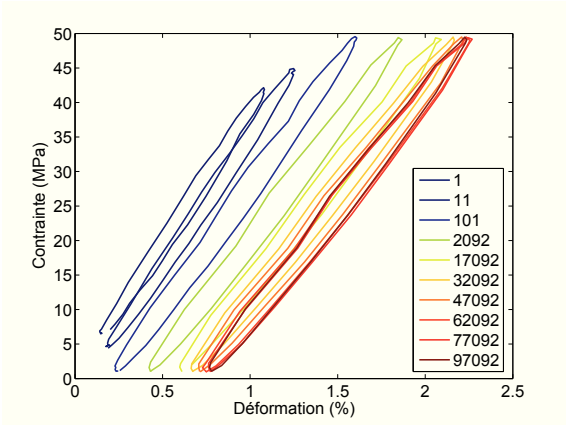

(a) Éprouvette prélevée à 0°, $N_r$ = 72237




(b) Éprouvette prélevée à 30°, $N_r$ = 76138




(c) Éprouvette prélevée à 60°, $N_r$ = 91359




(d) Éprouvette prélevée à 90°, $N_r$ = 97964

FIGURE 9.5 – Évolution de la réponse mécanique pour différents cycles $N$ au cours de chargements de fatigue sur les éprouvettes ISO527-2-5A découpées au centre des plaques injectées.

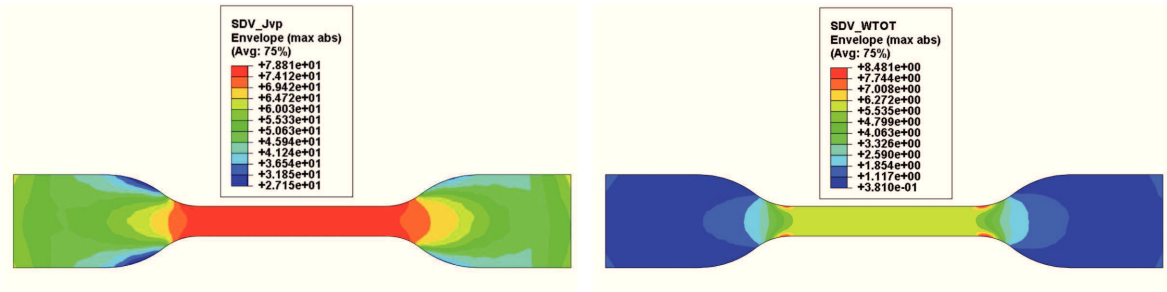
- le critère de Klimkeit [112], qui est le plus polyvalent des critères multiaxiaux publiés dans la littérature ;
- le critère énergétique, qui semble être le plus prometteur au vu de l'analyse menée lors du chapitre 8.

Les paramètres de chacun de ces critères sont récapitulés dans le tableau 9.1, avec les valeurs identifiées par minimisation aux moindres carrés. Les résultats sont présentés sur la figure 9.8.

Le critère de Tsai-Hill modifié permet (comme il fallait s'y attendre) d'aboutir à de bons résultats [5]. Notons cependant que ce critère sous-estime systématiquement la durée de vie des essais des éprouvettes découpées à 0° au centre des plaques : malgré un cadre d'application particulièrement adapté et l'emploi de quatre paramètres, la prédictivité du critère de Tsai-Hill modifié reste discutable par certains aspects.

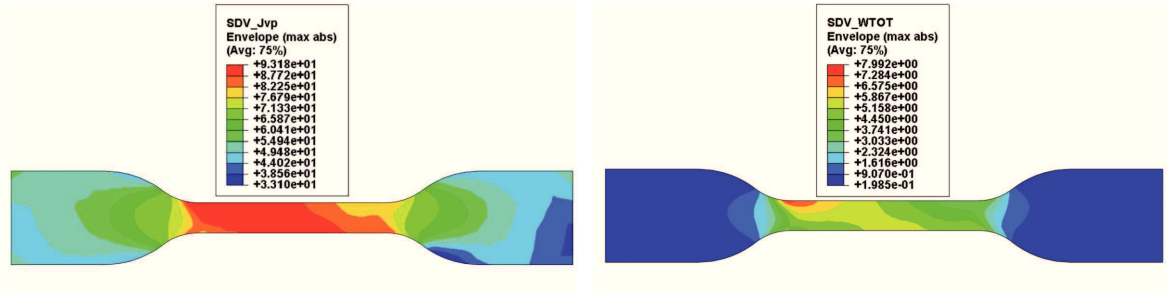
Le critère de Klimkeit nécessite la détermination de la densité d'énergie élastique $\Delta W_e$. Cette grandeur est calculée à partir de l'évaluation expérimentale de la raideur élastique tangente mesurée

5. Nous n'avons pas tracé les résultats donnés par une simple normalisation par la contrainte à rupture $\sigma_a/\sigma_u$, qui sont tout à fait comparables.




(a) $\mathcal{J}_{vp}$ (MPa) (b) $W_{\text{diss}}$ (mJ/mm$^3$)

FIGURE 9.6 – Comparaison entre les champs de contrainte viscoplastique équivalente $\mathcal{J}_{vp}$ et d'énergie dissipée cumulée $W_{\text{diss}}$ sur une éprouvette injectée moulée après 15 cycles de chargement en traction répétée, d'amplitude 450 N à 2 Hz ($R$=0.02).




(a) $\mathcal{J}_{vp}$ (MPa) (b) $W_{\text{diss}}$ (mJ/mm$^3$)

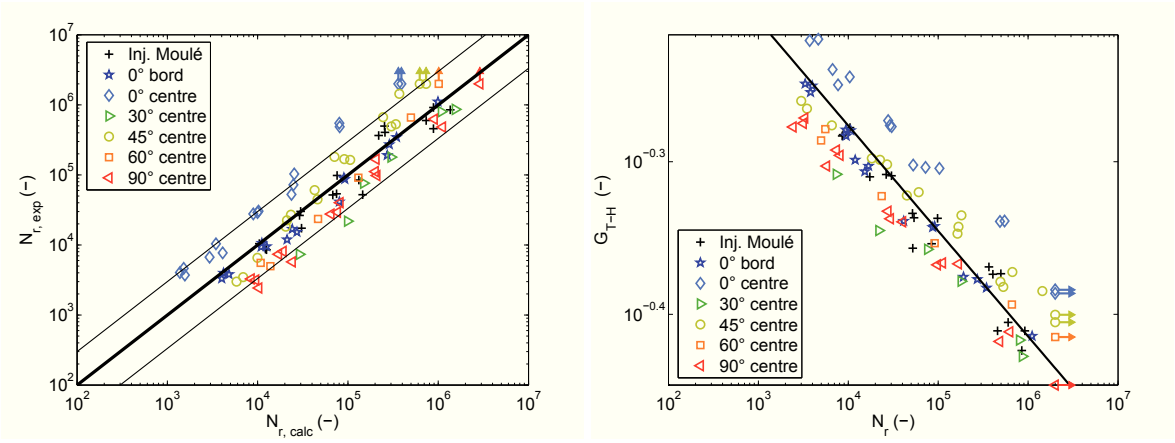
FIGURE 9.7 – Comparaison entre les champs de contrainte viscoplastique équivalente $\mathcal{J}_{vp}$ et d'énergie dissipée cumulée $W_{\text{diss}}$ sur une éprouvette découpée dans une plaque à 45° après 15 cycles de chargement en traction répétée, d'amplitude 290 N à 2 Hz ($R$=0.02).

sur le début des courbes de traction monotone à 250 MPa/s. Cette vitesse de chargement est en effet du même ordre de grandeur que celles appliquées lors des sollicitations de fatigue. Ce critère fournit des résultats médiocres dans l'ensemble, pour lesquels l'erreur peut même être très grande dans certains cas de chargement.

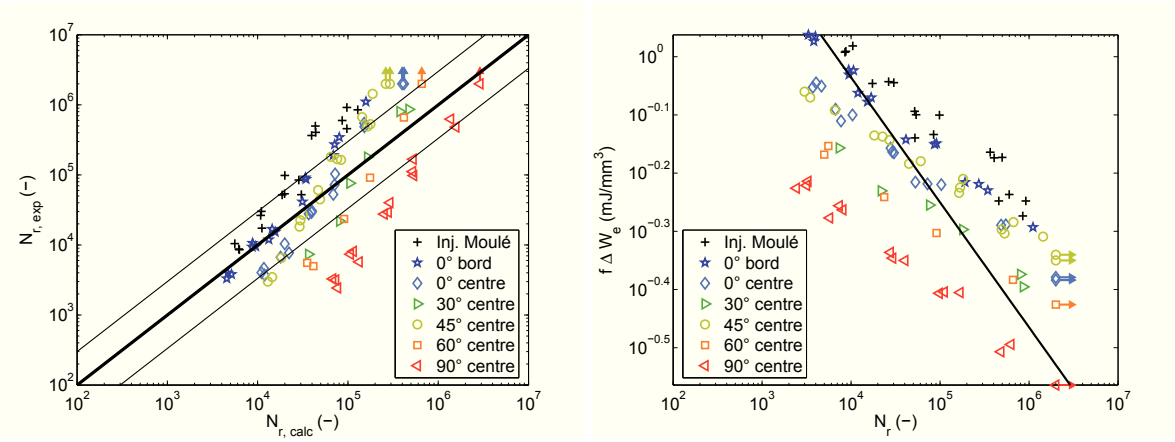
Enfin, le critère énergétique, fondé sur la dissipation d'énergie, est caractérisé à partir de la mesure de l'aire d'hystérèse en régime stationnaire. Ce modèle ne fait intervenir que deux paramètres et offre cependant une bonne prédictivité de la durée de vie. Remarquons que pour certaines microstructures (éprouvettes prélevées à 90° notamment – voir la figure 9.5d), la mesure précise de l'aire de boucle peut être rendue difficile par les faibles amplitudes d'effort, ce qui explique la légère augmentation de la dispersion apparente (au sein d'une série d'essais effectués sur la même microstructure).

### 9.1.5 Discussion

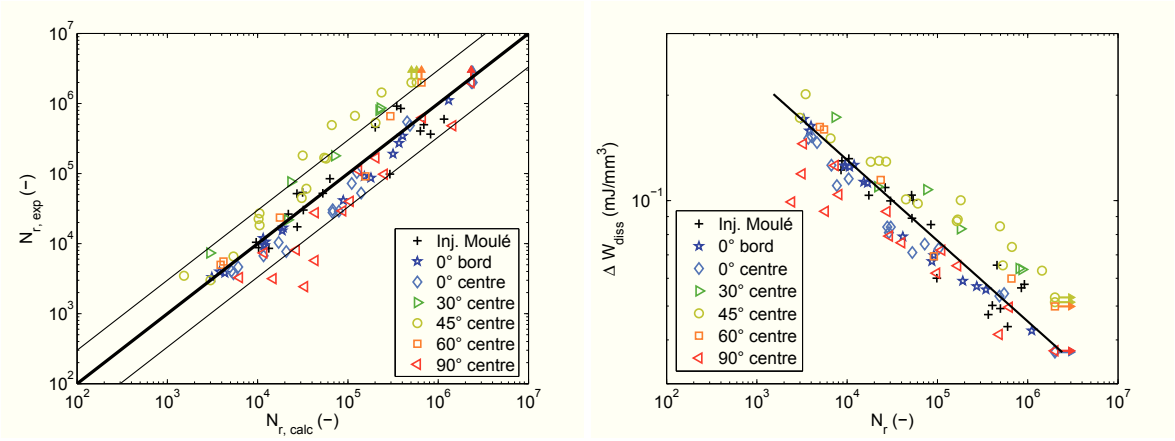
Nous confirmons dans cette section le potentiel du critère énergétique. En effet, des trois critères sélectionnés, nous voyons que c'est celui qui apporte le meilleur compromis entre le nombre de paramètres du modèle (et donc le nombre d'essais nécessaires à une base d'identification) et la précision de l'estimation de la tenue en fatigue. D'autre part, si le critère de Tsai-Hill modifié reste intéressant pour




(a) Critère de Tsai-Hill modifié




(b) Critère en densité d'énergie élastique de Klimkeit et al. [114]




(c) Critère énergétique

FIGURE 9.8 – Application de différents critères aux essais de fatigue réalisés sur les éprouvettes ISO527-2-5A en conditions standard.

ce type d'essais où seule l'orientation des fibres varie mais où le chargement est toujours le même, nous avons montré lors du chapitre 8 qu'il est difficile de l'utiliser dans le cas de chargements multiaxiaux. *A contrario*, le critère énergétique a été mis en avant pour sa capacité à décrire l'influence de la multiaxialité du chargement ainsi que les effets de contrainte moyenne. Nous vérifions donc dans cette section qu'il permet en outre de prendre en compte la sensibilité à la microstructure locale.

| Critère | Paramètres identifiés en conditions RH50, 23 °C | Eq. |
|---|---|---|
| Tsai-Hill modifié ($R$ = 0) | $\sigma_{\text{longi}}$=118 MPa, $\sigma_{\text{transv}}$=48.9 MPa, $\tau_{\text{longi}}$=46.6 MPa, $b$=0.069 | 8.4, 8.6 |
| Énergétique | $b$=0.230, $C$=1.09 mJ/mm$^3$ | 7.13 |
| Klimkeit | $b$=0.215, $C$=6.65 mJ/mm$^3$ | 7.19 |

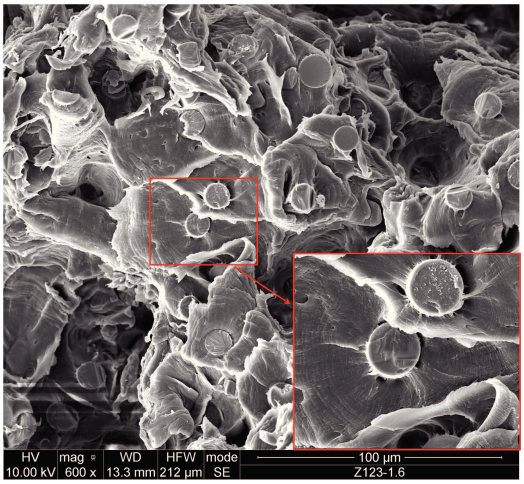
TABLE 9.1 – Paramètres des critères de fatigue appliqués aux essais réalisés sur les éprouvettes ISO527-2-5A en conditions standard.

Mettons cependant en avant une remarque intéressante concernant le critère de Klimkeit. Si nous comparons les valeurs identifiées dans les tableaux 8.2 et 9.1, nous constatons que les paramètres du critère de Klimkeit dans les conditions standard sont très proches, ce qui n'est pas le cas du critère énergétique. La simplicité du critère de Klimkeit lui confère donc un caractère de robustesse, tandis que le critère énergétique, qui repose sur la compréhension des mécanismes dissipatifs, est plus précis mais également plus dépendant de la précision de la réponse mécanique non linéaire.

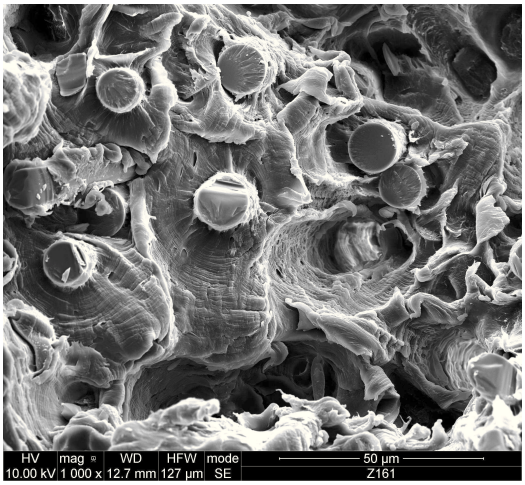
Pour conclure notre analyse, rappelons que le critère énergétique nous rend capable de prédire la localisation des sites d'amorçage en fatigue, ce qui n'est pas le cas des critères en contraintes (type Tsai-Hill) [6]. Cependant, le post-traitement expérimental que nous avons présenté dans cette section est mené à partir de la mesure de la déformation en zone utile, tandis que les fissures s'amorcent au voisinage du congé. De façon à être parfaitement cohérent, il faudrait donc pouvoir évaluer les grandeurs mécaniques dans la zone critique, ce qui nécessite le recours au calcul par éléments finis. Nous n'avons pas développé cette piste, qui présente de toute façon un inconvénient intrinsèque : la mise en évidence d'un critère de fatigue à l'aide de la simulation numérique perd le caractère d'irréfutabilité que possède une démonstration expérimentale. Dans notre analyse, nous avons donc *implicitement* fait l'hypothèse d'une règle de passage des grandeurs mécaniques entre la zone utile et la zone critique purement géométrique et donc non dépendante à la variation de la microstructure ou de l'amplitude du chargement mécanique.

Cette hypothèse n'est pas cruciale ici dans la mesure où le facteur de concentration de contrainte $K_t$ est modéré ; le travail d'analyse par éléments finis sera développé dans la section suivante sur des structures qui présentent des facteurs $K_t$ plus importants.

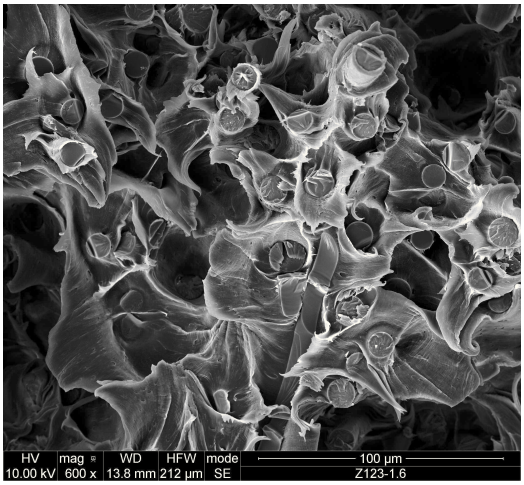
6. Le critère de Klimkeit permet également de localiser les zones critiques au voisinage des congés de raccordement.



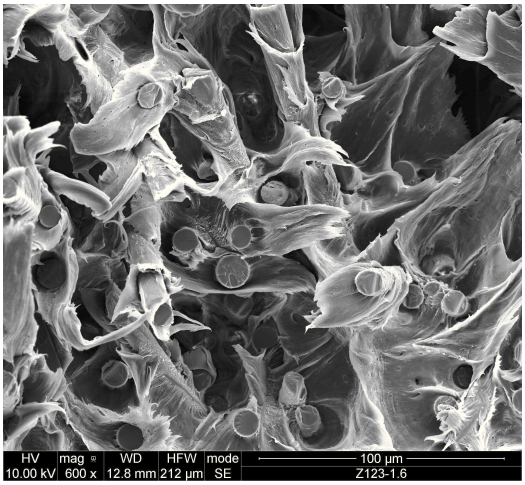

(a) Zone d'amorçage (23 ˚C, RH50)



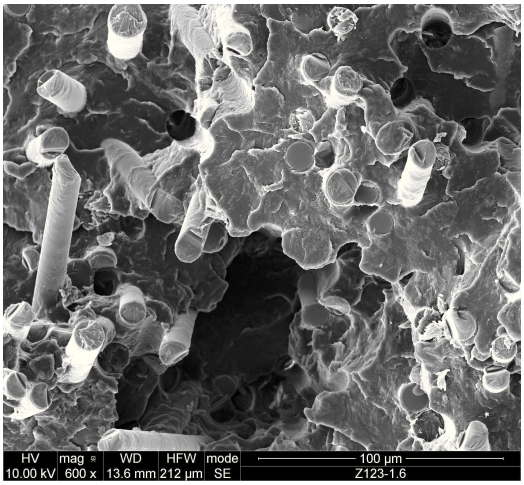

(b) Zone d'amorçage (140 ˚C, DAM)



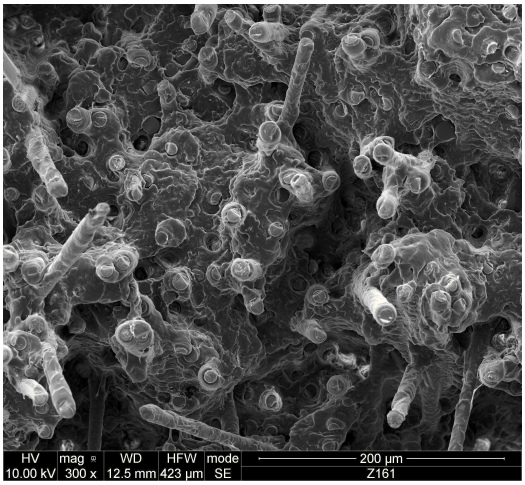

(c) Zone de propagation ductile (23 ˚C, RH50)




(d) Zone de propagation ductile (140 ˚C, DAM)




(e) Zone de propagation fragile (23 ˚C, RH50)




(f) Zone de propagation fragile (140 ˚C, DAM)

FIGURE 9.9 – Observation au MEB de faciès de rupture d'éprouvettes $K_t$=2.5 sollicitées en fatigue, en conditions standard (gauche) et à 140 ˚C (droite) ; trois zones distinctes sont identifiées pour chaque faciès.

## 9.2 Application et validation sur structures

Dans cette section, nous tirons parti d'une campagne expérimentale de fatigue en traction réalisée au LBF sur des éprouvettes avec accidents de forme (voir annexe A.3). Nous avons montré au chapitre 6 que ces éprouvettes sont en fait des mini-structures, présentant des champs microstructuraux et mécaniques fortement hétérogènes. Dans un premier temps, une analyse des faciès de rupture ainsi que le suivi des indicateurs macroscopiques permet de montrer que nous sommes toujours dans le cadre d'application d'un critère de fatigue en amorçage. Nous discutons de l'application du critère énergétique et du critère de Klimkeit en conditions standard et nous étendons l'analyse au cas d'essais réalisés à 140 ˚C.

### 9.2.1 Fractographie

Nous présentons sur la figure 9.9 des observations de faciès de rupture en fatigue dans les conditions standard et à 140 ˚C. Ces clichés ont été réalisés avec le microscope électronique à balayage du LMS, après métallisation de la surface de rupture. Nous présentons les observations effectuées sur des éprouvettes $K_t$=2.5, car la concentration de contrainte en fond d'entaille permet de localiser avec certitude la zone d'amorçage des fissures de fatigue.

À température ambiante et en conditions $\mathcal{H}$=50 %, c'est-à-dire au voisinage de la température de transition vitreuse, nous confirmons l'analyse du faciès de rupture exposée par Klimkeit et al. [112, 114] :

- une zone de micro-ductilité correspond à la zone d'amorçage de la fissure de fatigue. On remarque des stries concentriques autour des fibres, qui témoignent de l'avancement des micro-fissures et d'un endommagement diffus. En outre, on observe peu de fibres extraites, ce qui tend à valider le fait que les extrémités des fibres constituent la majorité des sites d'amorçage ;
- une zone de forte ductilité, où la matrice est localement très étirée, s'identifie comme la zone de propagation stable lors de la rupture finale, qui s'effectue conformément au scenario de Noda et al. [150] (voir la figure 7.11b) ;
- une zone fragile s'explique par la propagation instable de la macro-fissure de fatigue. Nous constatons que le plan de fissure n'évite cette fois plus les fibres, qui sont extraites de la matrice, ce qui est en accord, une fois de plus, avec les interprétations proposées dans la littérature.

À température plus élevée, nous identifions toujours ces trois mêmes zones, mais nous pouvons néanmoins soulever quelques différences dues au caractère très fortement ductile de la matrice polyamide dans ces conditions. Tout d'abord, dans la zone d'amorçage, la cavitation initiée à l'extrémité des fibres s'étend davantage le long de l'interface fibre/matrice. La zone de ductilité est très marquée, avec des déformations matricielles encore plus importantes. Enfin, la zone de rupture instable présente un aspect que nous ne qualifions de « fragile » que par constraste avec la zone ductile : la matrice est toujours faiblement étirée, mais le trajet de fissure ne fait plus apparaître de plans nets et bien découpés. Par ailleurs, les fibres extraites de la matrice sont recouvertes d'une couche de polyamide. Cela signifie que la rupture finale est purement matricielle, ce que nous attribuons à une chute plus importante des propriétés matricielles avec la température en comparaison avec les propriétés interfaciales.

### 9.2.2 Stationnarité de la réponse mécanique

La figure 9.10 permet d'illustrer la validité de l'hypothèse de stationnarité de la réponse mécanique. L'étude de la déformation centrée [19], c'est-à-dire de la déformation soustraite de sa valeur moyenne sur un cycle, permet de montrer que la réponse mécanique cyclique stabilise rapidement devant le nombre de cycles à rupture ($N_r$=132245). Nous pouvons une fois de plus confondre le nombre

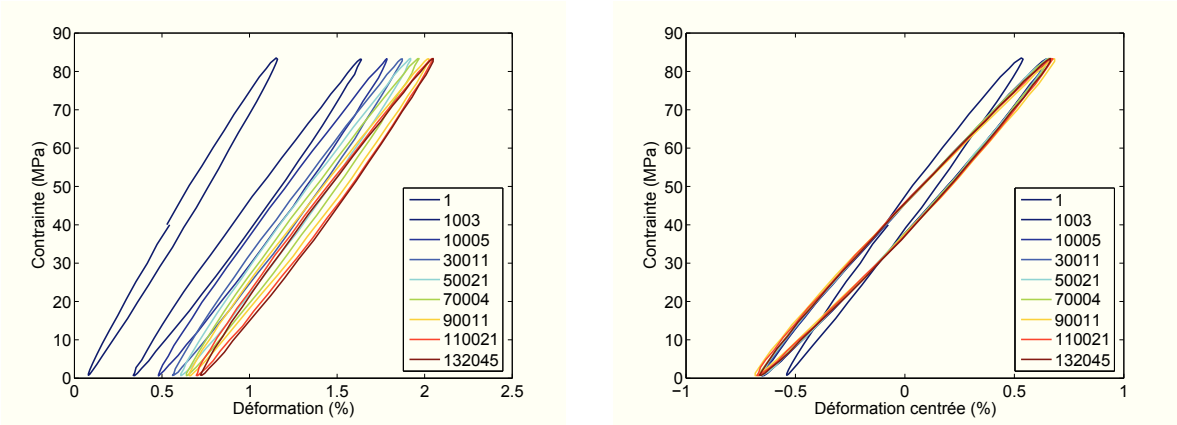



FIGURE 9.10 – Évolution de la réponse mécanique pour différents cycles $N$ au cours du chargement de fatigue sur une éprouvette $K_t$=1, sollicitée à $\sigma_a$=42 MPa ($R$=0, $f$=1 Hz) en conditions $\mathcal{H}$=50 % et $T$=23 ˚C (à gauche) et validation de l'hypothèse de stationnarité (à droite).

de cycles à amorçage avec le nombre de cycles à rupture. En effet, mis à part la dérive en déformation, les quantités mécaniques macroscopiques présentent un régime stationnaire jusqu'à la rupture en fatigue.

Une déformation résiduelle progressive est cumulée au cours du chargement cyclique. Nous avons réalisé au LBMS des essais de fatigue dans des conditions identiques à ceux effectués au LBF, mais avec des interruptions du chargement : des phases de recouvrance à effort nul d'une durée d'une heure sont imposées à différentes étapes de la durée de vie de l'éprouvette. Nous constatons sur la figure 9.11 que l'interruption des essais de fatigue ne modifie pas la durée de vie de façon sensible, ni la réponse mécanique, notamment en raison du choix d'une fréquence d'essai de 1 Hz qui rend l'auto-échauffement négligeable. L'amplitude de recouvrance ne dépend pas du nombre de cycles ni du niveau de déformation atteint, et ne correspond qu'à environ 15 % de la déformation résiduelle totale – voir la courbe $\varepsilon_{\min}(t)$. Nous pouvons donc interpréter l'accumulation de déformation résiduelle comme la conséquence de mécanismes viscoplastiques, non recouvrables et activés essentiellement avant l'établissement du régime stationnaire, auxquels il faut ajouter une composante viscoélastique recouvrable, qui n'évolue pas sensiblement au cours du chargement cyclique.

### 9.2.3 Résultats expérimentaux

Les courbes de Wöhler expérimentales sont tracées pour les deux rapports de charge testés ainsi que pour les trois géométries d'éprouvette sur la figure 9.12. En ordonnée, la grandeur $\sigma_a$ désigne l'amplitude de contrainte nominale, c'est-à-dire l'amplitude d'effort divisé par la section utile. Dans les zones où s'amorcent les fissures de fatigue, à savoir en fond d'entaille des éprouvettes $K_t$=2.5 et $K_t$=10, ou bien dans les congés de raccordement des éprouvettes $K_t$=1, la contrainte locale est évidemment différente de la contrainte nominale. L'analyse des résultats d'essais de fatigue sur ces éprouvettes nécessite donc la détermination des grandeurs mécaniques locales à l'aide du calcul par éléments finis, ce que nous allons exposer dans la suite. C'est la raison pour laquelle ces éprouvettes font office de structures de validation pour le modèle de tenue en fatigue.

La répétition de certains niveaux de chargement permet de constater une fois de plus la faible dispersion en fatigue des thermoplastiques renforcés en fibres courtes, bien que ces mini-structures soient plus complexes que de simples éprouvettes. Cette observation est d'une part la conséquence de

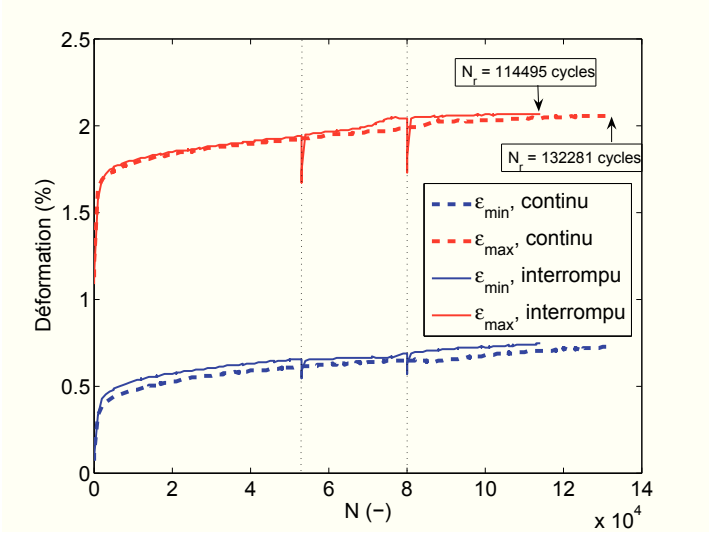
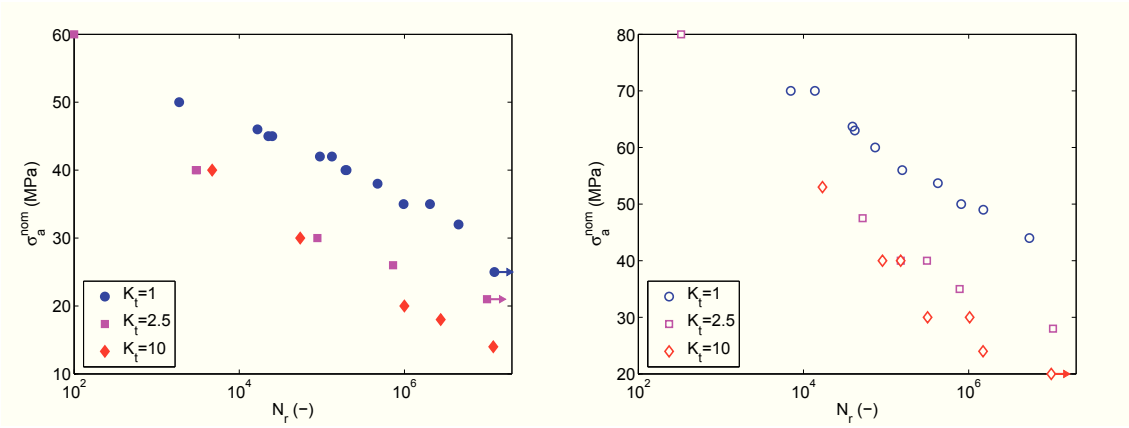



FIGURE 9.11 – Évolution des extrema de la déformation au cours du chargement de fatigue (éprouvette $K_t$=1, $\sigma_a$=42 MPa, $R$=0, $f$=1 Hz, conditions $\mathcal{H}$=50 % et $T$=23 °C) avec ou sans interruption.




(a) $R = 0$ (b) $R$ = -1

FIGURE 9.12 – Courbes de Wöhler $\sigma_a - \log N_r$ en conditions standard sur les trois géométries d'éprouvettes LBF.

la bonne répétabilité du procédé de moulage par injection, mais également de la nature du matériau qui présente de multiples sites d'amorçage. La fréquence des signaux d'effort (sinusoïdaux) est choisie de façon à limiter l'auto-échauffement des éprouvettes ; néanmoins, tous les essais n'ont pas bénéficié d'un suivi thermique : il est possible, notamment sur les éprouvettes entaillées, que la température effective du matériau soit localement sensiblement supérieure à la température ambiante.

### 9.2.4 Validation du critère énergétique

#### a Simulation numérique

La détermination de la réponse mécanique locale sur les éprouvettes de fatigue avec accidents de forme nécessite une résolution par éléments finis, suivant la procédure détaillée lors du chapitre 6 (loi n°4 : modèle de comportement anisotrope non linéaire, avec les paramètres identifiés en conditions standard). Nous avons vérifié que 15 cycles de chargement sont suffisants pour garantir la stationnarité de la réponse numérique. Les grandeurs mécaniques locales $G_i$ sont calculées dans la zone d'amorçage des fissure de fatigue.

Deux démarches sont généralement employées dans la littérature pour analyser des structures dont la zone d'amorçage des fissures de fatigue présente un gradient de contrainte. La première consiste à faire apparaître explicitement la norme du gradient des quantités $G_i$ dans l'écriture du critère de fatigue [159] :

$$N_a = \tilde{f}(G_i, \left|\underline{\nabla G_i}\right|) \quad \text{avec} \quad \tilde{f}(G_i, 0) = f(G_i) \tag{9.1}$$

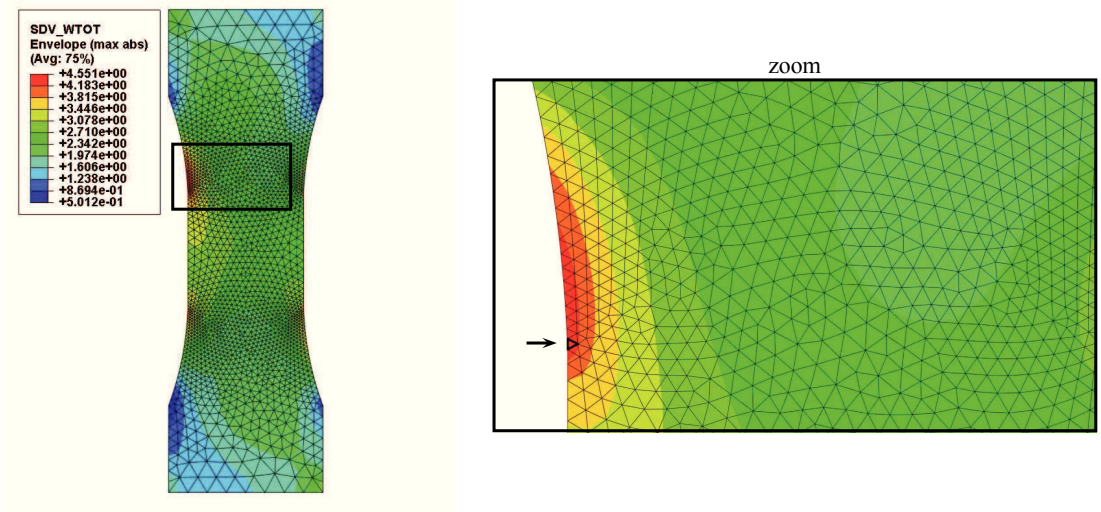
où $f$ est l'expression du critère déterminé à partir de l'analyse de structures sans accident de forme et $\tilde{f}$ sa forme généralisée en présence de gradients. La seconde approche requiert l'introduction d'un volume critique sur lequel sont moyennées les grandeurs $G_i$ ; la taille de ce volume est une grandeur intrinsèque au matériau et ne dépend pas de l'intensité du facteur d'entaille [133] ou du type de défaut [108]. Nous avons adopté cette démarche ; les volumes d'analyse (de taille similaire pour chaque éprouvette) sont indiqués sur la figure 9.13 par une flèche. Formellement, l'opération de moyenne s'écrit :

$$\langle G_i \rangle = \frac{1}{S\,e} \int_S \int_{z=0}^{e} G_i(x, y, z)\ \mathrm{d}z\ \mathrm{d}a \tag{9.2}$$

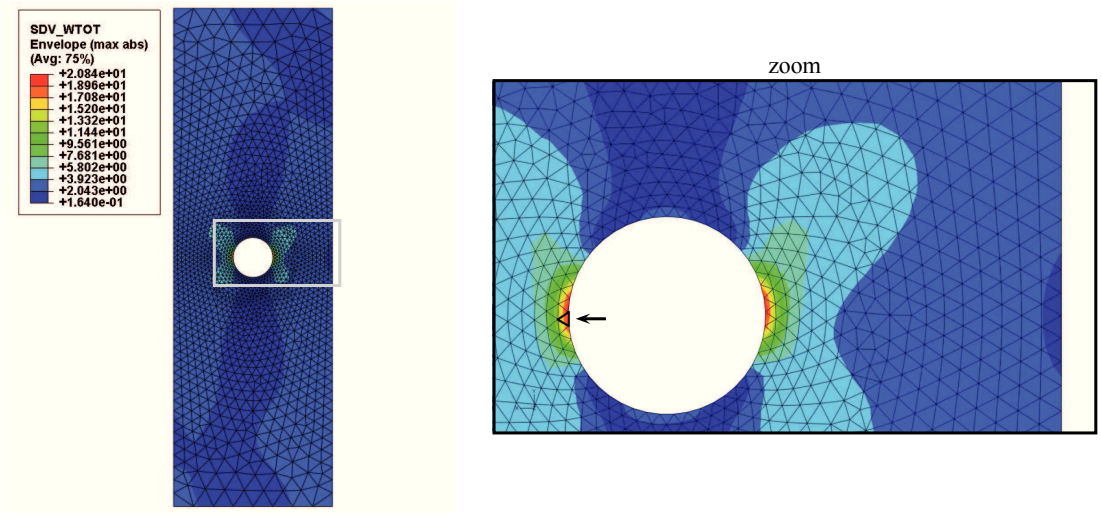
où $G_i$ est une grandeur mécanique locale (calculée aux points de Gauss) et $\langle G_i \rangle$ cette même grandeur moyennée sur le volume de surface $S$ et d'épaisseur $e$. La surface $S$ vaut environ 0.2 mm$^2$ dans notre étude, ce qui est cohérent avec l'ordre de grandeur proposé par De Monte et al. [55], tandis que l'épaisseur est celle de l'éprouvette. Nous ne faisons donc pas apparaître de disctinction relative à la structure cœur-peau.

#### b Application des critères de fatigue

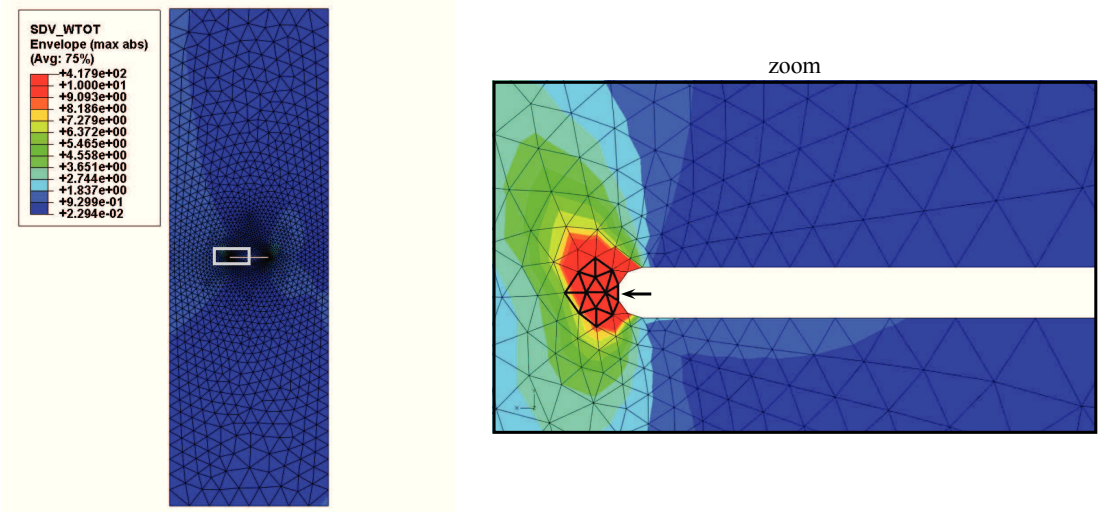
Nous avons tracé sur la figure 9.14 les durées de vie expérimentales rapportées à la densité d'énergie par cycle (corrigée pour tenir compte de l'influence de la grandeur moyenne) $f\Delta W_e$ ou bien à la densité d'énergie dissipée par cycle $\Delta W_{\text{diss}}$. Nous avons superposé en trait pointillé l'estimation de la durée de vie obtenue avec le critère de Klimkeit dans le premier cas, et avec le critère énergétique dans le second. Les paramètres de ces critères sont ceux identifiés à partir des essais de fatigue sur éprouvettes ISO527-2-5A présentés en section 9.1 (*i.e.* injectées moulées, découpées au bord et à différents angles au centre des plaques).




(a) Éprouvette $K_t$=1.0 ($\sigma_a$=35 MPa, $R$=0, $f$=1 Hz, conditions $\mathcal{H}$=50 % et $T$=23 ˚C) – $W_{\text{diss}}$ (mJ/mm$^3$)




(b) Éprouvette $K_t$=2.5 ($\sigma_a$=40 MPa, $R$=0, $f$=1 Hz, conditions $\mathcal{H}$=50 % et $T$=23 ˚C) – $W_{\text{diss}}$ (mJ/mm$^3$)




(c) Éprouvette $K_t$=10 ($\sigma_a$=40 MPa, $R$=0, $f$=1.5 Hz, conditions $\mathcal{H}$=50 % et $T$=23 ˚C) – $W_{\text{diss}}$ (mJ/mm$^3$)

FIGURE 9.13 – Zones de post-traitement des éprouvettes de fatigue LBF, après 15 cycles de chargement.

**Critère en densité d'énergie élastique**

Concernant le critère de Klimkeit tout d'abord, nous constatons que les paramètres du modèle identifié sur la campagne d'essais précédente conduisent à une franche sous-estimation de la durée de vie. Ceci peut s'expliquer par le fait que ce critère a été identifié sur l'ensemble des éprouvettes injectées ou découpées dans des plaques, tandis que les éprouvettes de fatigue sont localement plutôt assez bien orientées dans l'axe du chargement. On s'aperçoit qu'un critère identifié uniquement à partir des deux familles d'éprouvettes ISO527-2-5A injectées moulées ou découpées près du bord des plaques donnerait de meilleurs résultats, ce qui illustre la difficulté du critère à rendre compte de la sensibilité à la microstructure. Par ailleurs, on constate que l'ensemble des points associés à l'éprouvette $K_t$=1 est situé sous le nuage de points correspondant aux éprouvettes entaillées. Un volume d'analyse plus grand aurait permis d'obtenir de meilleurs résultats.

**Critère énergétique proposé**

Le critère en densité d'énergie dissipée permet une bonne prédiction des essais de fatigue sur éprouvette $K_t$=1 pour un rapport de charge nul, c'est-à-dire la situation qui est la plus proche des conditions d'identification du critère. Nous constatons qu'hormis pour les éprouvettes finement entaillées ($K_t$=10), les résultats obtenus sont encourageants, puisque la corrélation entre $\Delta W_{\text{diss}}$ et $N_r$ est satisfaisante et que le critère identifié précédemment permet une estimation correcte de la tenue en fatigue.

De même que précédemment, les résultats de la figure 9.14b laissent penser que l'emploi d'une zone d'analyse plus grande aurait permis d'améliorer les résultats concernant les éprouvettes $K_t$=10.

Nous n'avons cependant pas jugé prioritaire de corriger le volume d'analyse, puisque ces éprouvettes ne sont pas les plus pertinentes pour analyser la précision d'un critère de fatigue. En effet, les éprouvettes $K_t$=10 sont des cas d'étude particuliers, puisque le gradient de concentration de contrainte en fond d'entaille y est très important, et induit des variations sensibles des grandeurs $G_i$ sur des volumes de taille inférieure à la taille du VER de la microstructure [7]. Il est difficile d'exploiter ces essais à l'aide d'une résolution numérique à l'échelle macroscopique ; nous n'attachons ainsi pas trop d'importance au fait que les résultats sur éprouvettes $K_t$=10 soient beaucoup moins bons (surtout pour les faibles durées de vie).

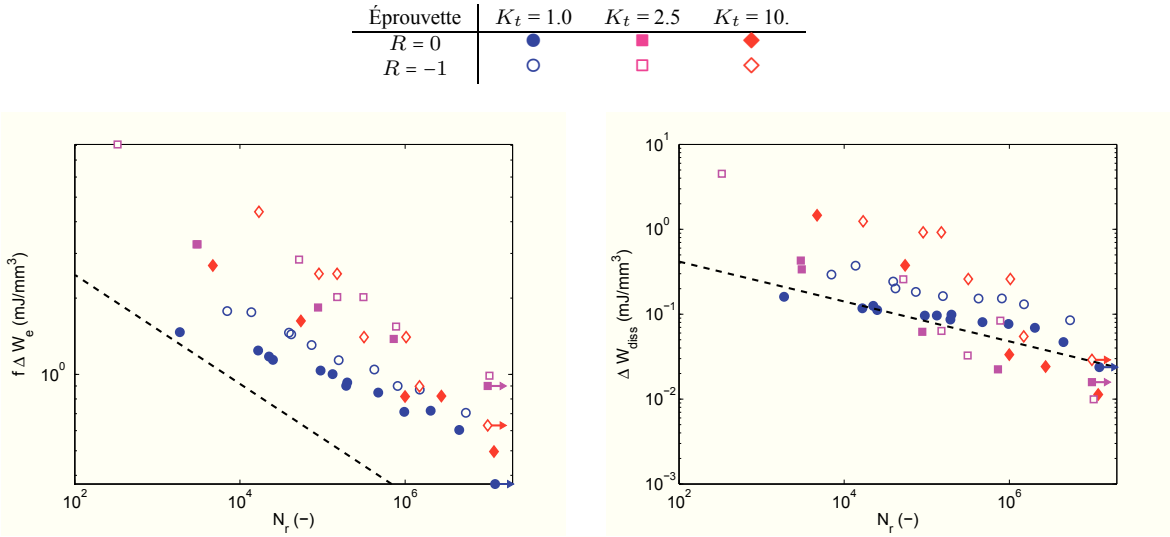
### 9.2.5 Extension à d'autres conditions environnementales

Une campagne d'essais de fatigue en température ($T$=140 °C, $\mathcal{H}$=0 %) a été réalisée au LBF suivant le même protocole que celle en conditions standard : des essais de traction pilotés en effort ont été effectués sur les trois géométries d'éprouvettes LBF, avec deux rapports de charge ($R$ = 0 et $R$ = −1). Les courbes de Wöhler expérimentales sont représentées sur la figure 9.15.

De même que précédemment, nous avons simulé par éléments finis la réponse mécanique cyclique à l'aide de la loi développée lors de la partie I, avec les paramètres identifiés à 140 °C pour un matériau à l'état DAM. La figure 9.16 présente l'application du critère de Klimkeit ainsi que du critère énergétique proposé de façon à évaluer lequel permet la meilleure corrélation avec la durée de vie [8]. Les droites en trait plein correspondent aux deux modèles de fatigue, dont les paramètres identifiés sont récapitulés dans le tableau 9.2. Ces valeurs sont déterminées par minimisation aux moindres carrés

7. Sur la figure 9.13c, nous avons écrêté l'échelle de couleurs de façon à faciliter la lecture, mais les valeurs des grandeurs $G_i$ varient d'un facteur 40 dans la zone de post-traitement.

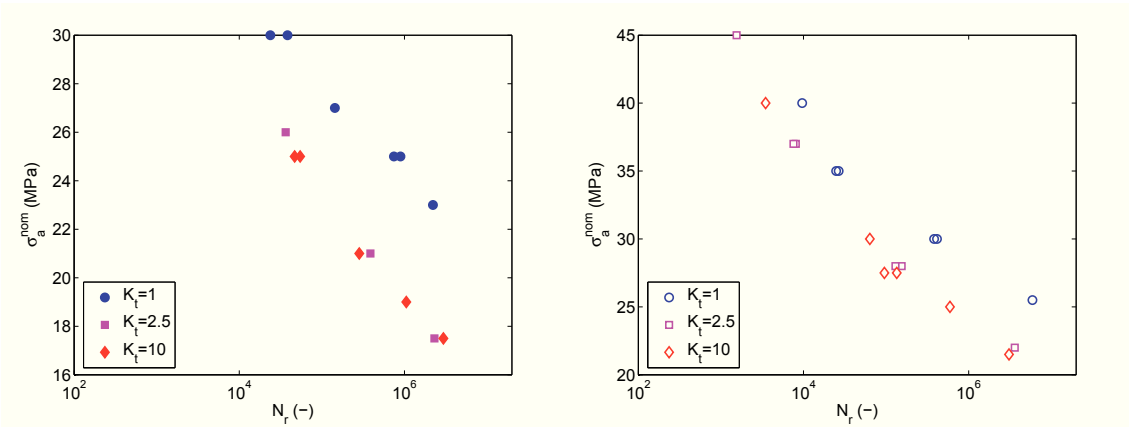
8. Le nombre de cycles à amorçage est confondu avec le nombre de cycles à rupture.




(a) Critère de Klimkeit

(b) Critère énergétique proposé

FIGURE 9.14 – Application du critère de Klimkeit et du critère énergétique aux essais de fatigue réalisés en conditions standard sur les 3 géométries d'éprouvettes LBF. Les lignes en tirets correspondent aux critères identifiés à partir des essais sur éprouvettes ISO527-2-5A (voir le tableau 9.1).



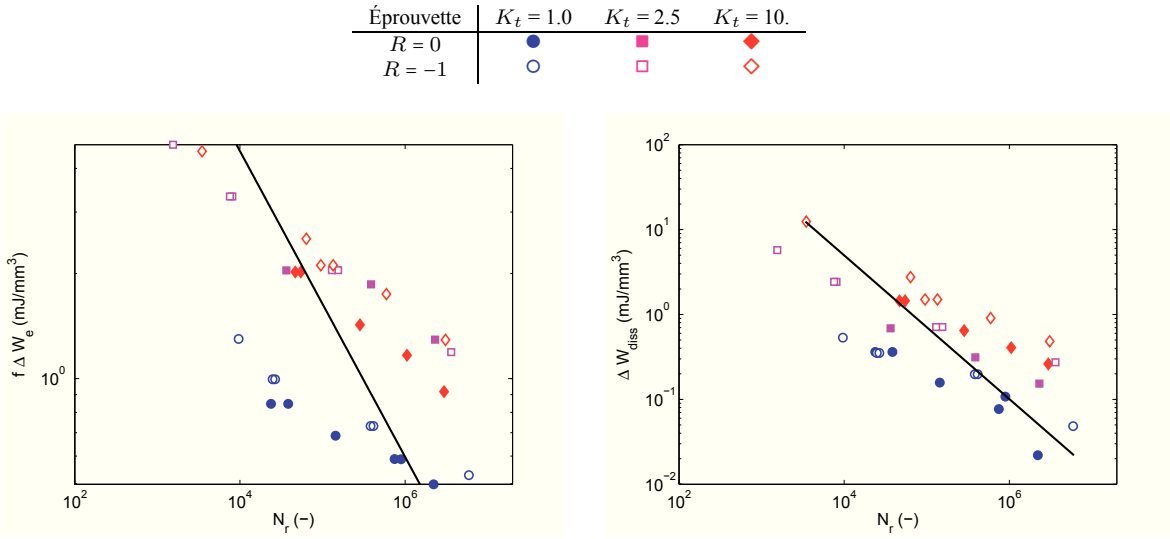

(a) $R = 0$

(b) $R$ = -1

FIGURE 9.15 – Courbes de Wöhler $\sigma_a$ – log $N_r$ à $T$=140 °C (matériau DAM) sur les trois géométries d'éprouvettes du LBF.

| Critère | Paramètres identifiés à 140 ˚C (DAM) | Eq. |
|---|---|---|
| Énergétique | $b$=0.846, $C$=1.20e4 mJ/mm$^3$ | 7.13 |
| Klimkeit | $b$=0.438, $C$=2.53e2 mJ/mm$^3$ | 7.19 |

TABLE 9.2 – Paramètres des critères de fatigue appliqués aux essais réalisés sur les éprouvettes LBF en conditions DAM, $T$=140 ˚C.




(a) Critère de Klimkeit

(b) Critère énergétique

FIGURE 9.16 – Application de différents critères aux essais de fatigue réalisés à 140 ˚C sur les 3 géométries d'éprouvettes LBF.

sur l'ensemble de la base expérimentale, même si nous aurions pu faire le choix d'exclure les essais effectués sur les éprouvettes $K_t$=10 (pour les raisons évoquées ci-dessus).

Nous constatons que le critère en densité d'énergie dissipée (figure 9.16b) offre de meilleurs résultats, surtout si on se restreint à l'analyse des essais sur éprouvettes $K_t$=1 et $K_t$=2.5. En ce qui concerne le critère de Klimkeit, la fonction $f$ qui décrit la sensibilité à la contrainte moyenne [116] permet un bon accord entre les deux valeurs de $R$, mais la densité d'énergie élastique ne semble pas être une grandeur physique pertinente pour prédire la tenue en fatigue des éprouvettes avec accidents de forme.

### 9.2.6 Bilan

Notre étude concernant les éprouvettes de fatigue testées au LBF, qui sont de véritables cas de validation malgré leur simplicité apparente, confirment la pertinence du critère énergétique. La densité d'énergie dissipée par cycle est une grandeur qui permet une meilleure corrélation avec la durée de vie que la densité d'énergie élastique ; un critère semblable à celui de Klimkeit avait pourtant été proposé dans la littérature pour décrire la tenue en fatigue d'éprouvettes de géométrie semblable [55]. Nous avons formulé cette conclusion à partir d'une analyse en deux étapes : tout d'abord nous avons montré que le critère énergétique identifié au préalable en conditions standard permet une estimation correcte de la durée de vie pour les éprouvettes $K_t$=1 et $K_t$=2.5 pour les deux rapports de charge, puis nous avons montré que ce critère s'applique également pour des températures élevées (140 ˚C).

Certains points restent pourtant à approfondir dans notre étude. Nous n'avons pas mené une analyse de sensibilité relative à la finesse du maillage, ni à la taille de la zone de post-traitement. Ce travail serait pourtant indispensable pour confirmer nos résultats, mais n'a pas pu être effectué dans le temps imparti de la thèse. Remarquons toutefois que la taille de maille est contrainte par la taille du VER de distribution locale d'orientation des fibres : il n'est donc pas possible de raffiner le maillage autant que l'on pourrait le souhaiter (ce qui pose notamment problème pour les éprouvettes $K_t$=10). Par ailleurs, la surface de la zone critique ne peut excéder quelques mm$^2$ (au grand maximum), d'après ce que l'on observe sur les faciès de rupture [112].

Par ailleurs, si les résultats obtenus avec le critère énergétique sont encourageants, ils présentent malgré tout une marge d'erreur de l'ordre de la décade pour les validations sur mini-structures. Les questions sont alors ouvertes : est-ce le critère lui-même qui doit être enrichi (voir la section 9.3), ou bien est-ce la simulation de la réponse mécanique locale qui est perfectible ? L'écart entre les nuages de points à $R$=0 et à $R$=-1 peut notamment être imputé à une simulation imparfaite de la phase de décharge ou du comportement en compression.

Pour conclure ce bilan concernant la validation du critère énergétique, remarquons qu'il aurait été intéressant d'appliquer l'ensemble de la démarche de dimensionnement (simulation de la réponse mécanique, localisation de la zone d'amorçage et prédiction de la tenue en fatigue) sur une structure industrielle. Nous disposons d'une base d'essais effectués sur un raccord de sortie du turbo (RST MCV DV4 – voir le chapitre 2), rompu en fatigue sous pression cyclique à 140 °C. Malheureusement, des difficultés de modélisation numérique des conditions aux limites, ainsi qu'une incompatibilité entre les maillages du calcul d'injection et du calcul mécanique (éléments coques d'une part, et volumiques de l'autre) font que cet objectif n'a pas pu être atteint pour le moment.

## 9.3 Discussion autour du critère énergétique

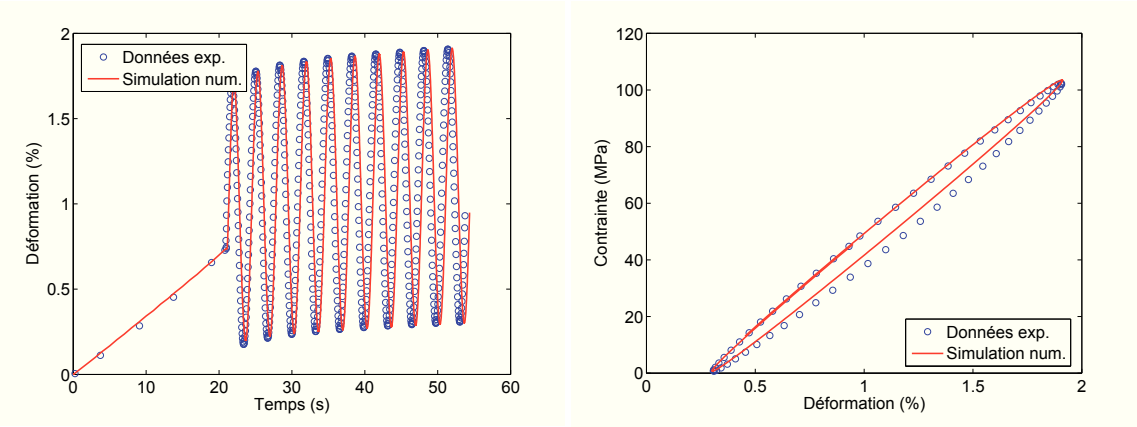
De façon à enrichir la discussion autour de la pertinence du critère énergétique, nous avons réalisé une campagne expérimentale au LBMS en analysant l'influence sur la tenue en fatigue de la forme des signaux de chargement. En effet, tandis que des critères en amplitude de contrainte ou en densité d'énergie élastique sont insensibles à la présence de paliers de recouvrance ou de fluage, le critère énergétique, couplé à l'utilisation du modèle de comportement non linéaire développé en partie I, peut permettre de rendre compte des éventuelles variations de la durée de vie.

### 9.3.1 Fatigue et histoire de chargement

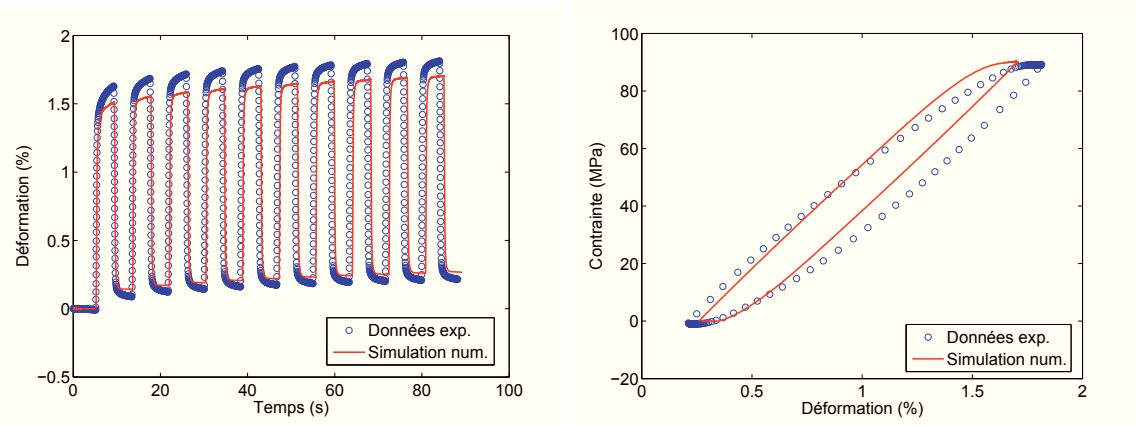
#### a Conditions expérimentales

Des éprouvettes ISO527-2-1A (voir annexe A.1) ont été conditionnées à $\mathcal{H}$=60 % et sollicitées en fatigue en traction répétée ($R$=0) à température ambiante. Le signal d'effort appliqué est soit sinusoïdal (avec une fréquence choisie de façon à limiter l'auto-échauffement – qui sera négligé dans notre analyse), soit trapézoïdal, avec des paliers de fluage et de recouvrance de 4 secondes et des temps de charge/décharge de 0.2 secondes chacun (la durée totale d'un cycle est donc de 8.4 secondes). Différents niveaux de contrainte nominale ont été appliqués pour chaque signal, de façon à balayer une gamme de durée de vie suffisamment large. La déformation est mesurée en zone utile (où s'amorcent les ruptures de fatigue) à l'aide d'un extensomètre à couteaux.

Remarquons que le choix d'un signal trapézoïdal n'est pas fortuit, puisqu'il s'apparente aux sollicitations rencontrées sur les composants du circuit d'admission d'air lors de la vie en service (voir la section 6.3).




(a) Signal sinusoïdal, $\sigma_a$=52 MPa, $R$=0, $f$=0.3 Hz



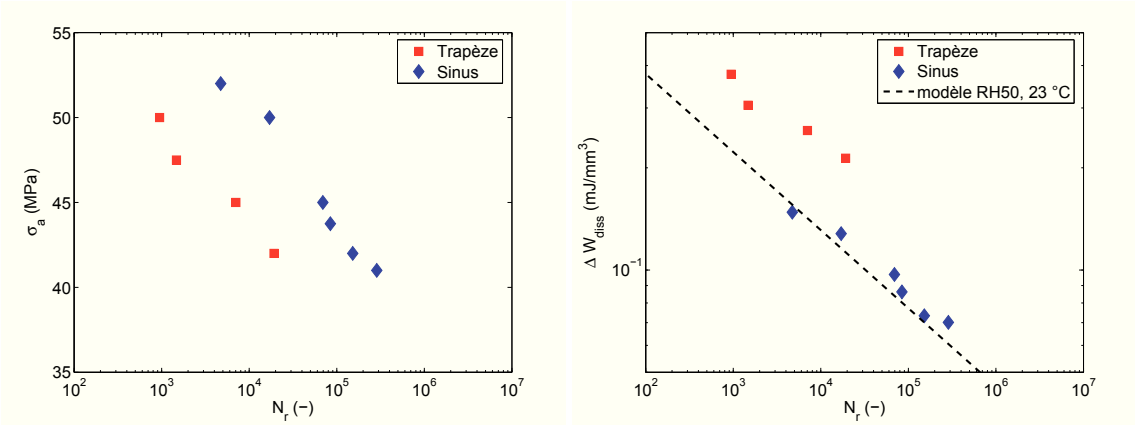

(b) Signal trapézoïdal, $\sigma_a$=45 MPa, $R$=0, $T_{\text{cycle}}$=8.4 s

FIGURE 9.17 – Comparaison calcul-essai sur différents signaux de fatigue sur éprouvette ISO527-2-1A conditionnées à $T$=23 ˚C et $\mathcal{H}$=60 % : suivi temporel des 10 premiers cycles (à gauche), et affichage du cycle n°10 dans le plan $\sigma - \varepsilon$ (à droite).

## b Simulation numérique

La condition ($T$=23 ˚C, $\mathcal{H}$=60 %) ne faisant pas partie de la base d'identification présentée au chapitre 4 pour différentes conditions environnementales , nous avons interpolé les paramètres du modèle de comportement à partir des conditions ($T$=23 ˚C, $\mathcal{H}$=50 %) et ($T$=23 ˚C, $\mathcal{H}$=75 %). L'interpolation linéaire est fondée sur la variation de l'écart à la température de transition vitreuse, $T - T_g(\mathcal{H})$, selon la procédure développée et validée en partie I.

Nous présentons sur la figure 9.17 la comparaison entre les signaux de déformation expérimentaux et simulés. La corrélation calcul-essai est satisfaisante, particulièrement en ce qui concerne les essais sinusoïdaux. Nous illustrons par cet exemple la capacité du modèle de comportement à décrire correctement la réponse mécanique cyclique pour différents signaux de fatigue (aire d'hystérèse, déformation résiduelle cumulée lors des premiers cycles, amplitude de déformation).




(a) Amplitude de contrainte (b) Densité d'énergie dissipée par cycle

FIGURE 9.18 – Analyse des essais de fatigue sur éprouvette ISO527-2-1A conditionnées à $T$=23 °C et $\mathcal{H}$=60 % : diagramme $\sigma_a$ – log $N$ (gauche) et critère énergétique (droite).

### c Résultats expérimentaux des essais de fatigue

La figure 9.18 rassemble les résultats des essais de fatigue effectués durant cette campagne expérimentale. Nous avons tracé la durée de vie expérimentale [9] rapportée à l'amplitude de contrainte nominale ou à la densité d'énergie dissipée par cycle (mesurée en régime stationnaire). Par ailleurs, dans le second cas, nous avons tracé en tirets le critère énergétique identifié en conditions standard (voir la section 9.1, tableau 9.1). Nous estimons en effet que les paramètres du critère énergétique dans la condition étudiée ($T$=23 °C, $\mathcal{H}$=60 %) doivent être proches de ceux caractérisés en conditions standard [10], malgré la différence de conditions hygrométriques et de distribution d'orientation locale – notamment en ce qui concerne la structure cœur-peau.

La comparaison de ces résultats nous permet de tirer plusieurs conclusions. En premier lieu, remarquons qu'un dimensionnement fondé sur l'amplitude de contrainte conduit à une sur-estimation de la durée de vie lorsque l'on change la forme du signal. Cette remarque est également valable pour un critère en densité d'énergie élastique, qui dans ce cas précis donnerait des résultats tout à fait similaires. Pourtant, pour des raisons évidentes de gain de temps, il n'est pas envisageable de caractériser la tenue en fatigue des thermoplastiques chargés à l'aide de signaux trapézoïdaux. Cela signifie donc que les pièces risquent d'être sous-dimensionnées pour des sollicitations davantage représentatives de la vie en service. Au contraire, une démarche de dimensionnement reposant sur le critère énergétique est conservative.

Le critère énergétique conduit cependant à une sous-estimation de la tenue en fatigue pour les signaux trapézoïdaux, vraisemblablement assez franche même si la base d'essais n'est pas suffisante dans cette étude pour caractériser un critère dans les conditions ($T$=23 °C, $\mathcal{H}$=60 %). Nous interprétons ce résultat en postulant que la prise en compte de la totalité de l'énergie dissipée est trop sévérisant au regard de la tenue en fatigue [11]. Cette remarque fait écho à la proposition d'un critère

9. Nous avons vérifié une fois de plus que l'amorçage et la rupture finale peuvent être confondus.

10. La droite en tirets nous permet de valider que les densités d'énergie dissipée mesurées sur ces éprouvettes sont cohérentes avec celles mesurées lors de la campagne sur éprouvettes ISO527-2-5A en conditions standard.

11. Remarquons qu'il est également envisageable que la phase de propagation ne soit pas négligeable pour les signaux trapézoïdaux : l'amorçage pourrait intervenir précocement par rapport à la rupture, et la propagation de la fissure finale s'avérer lente en raison de l'amplitude de contrainte appliquée relativement faible. L'évolution de la raideur au cours du

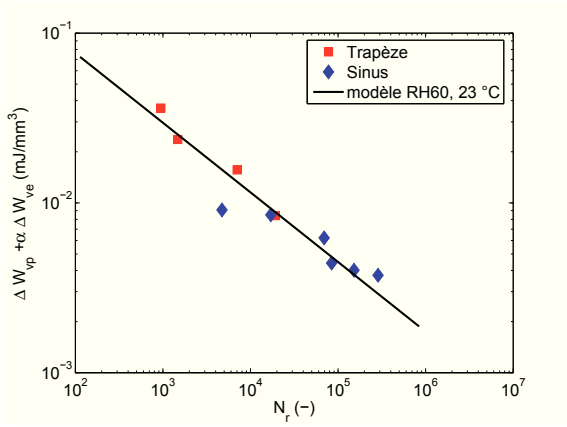



FIGURE 9.19 – Application du critère énergétique modifié sur les essais de fatigue avec différentes histoires de chargement.

énergétique modifié (Eq. 7.17 page 152) où les contributions viscoélastique et viscoplastique sont distinguées dans le modèle de fatigue. Nous allons développer cette idée dans la suite de notre propos.

### 9.3.2 Vers un critère énergétique modifié ?

Contrairement à la densité d'énergie dissipée totale, qui peut se mesurer expérimentalement, la distinction des mécanismes dissipatifs nécessite le recours à la simulation numérique de la réponse mécanique. Nous avons cependant vérifié sur la figure 9.18 que le modèle de comportement permet de décrire avec une précision correcte la réponse mécanique, ce que nous allons mettre à profit dans cette section.

Nous présentons sur la figure 9.19 l'application du critère énergétique modifié aux essais de fatigue en conditions ($T$=23 ˚C, $\mathcal{H}$=60 %). Nous constatons que les paramètres identifiés (voir le tableau 9.3) permettent une excellente concordance entre les deux familles d'essais, ce qui tend à confirmer notre interprétation : l'énergie dissipée lors des essais avec un signal trapézoïdal, essentiellement d'origine viscoélastique, ne doit pas servir en totalité d'indicateur de l'endommagement en fatigue.

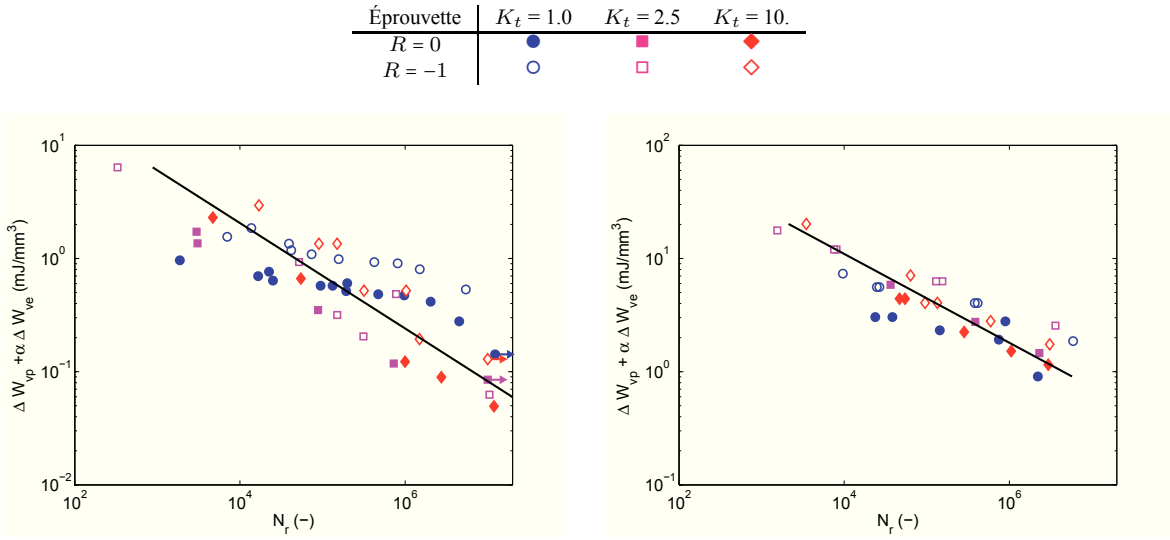
Forts de ce premier résultat intéressant, nous pouvons appliquer le critère énergétique modifié aux essais de fatigue sur les éprouvettes avec accidents de forme, en conditions standard et à 140 ˚C (figure 9.20). Nous constatons dans les deux cas une amélioration sensible de la prédictivité du critère en comparaison avec le critère énergétique. L'identification des paramètres du modèle (rassemblés dans le tableau 9.3) est effectuée sur l'ensemble des conditions d'essais ; nous aurions pu améliorer ces résultats en excluant les essais sur les éprouvettes $K_t$=10, que nous avons mentionnés comme étant difficiles à analyser.

Avant d'aller plus loin, intéressons-nous aux paramètres identifiés pour le critère énergétique modifié pour chacune des trois conditions environnementales. Deux bémols doivent être soulevés. Les valeurs identifiées dans les conditions RH50 et RH60 à température ambiante sont sensiblement différentes, ce qui est intriguant. Par ailleurs, nous constatons que le paramètre $\alpha$, qui prend une valeur faible pour permettre l'accord entre les différentes histoires de chargement (conditions $T$=23 ˚C,

chargement ne permet pas la détection nette d'un amorçage avant la rupture, mais ce type de chargement n'étant pas étudié dans la littérature, il convient donc de prendre des précautions quant au postulat $N_a \sim N_r$.

| Paramètre | Unité | RH60, 23 ˚C | RH50, 23 ˚C | DAM, 140 ˚C |
|---|---|---|---|---|
| $\alpha$ | - | 5.41e-2 | 6.30 | 1.78e2 |
| $b$ | - | 0.410 | 0.466 | 0.392 |
| $C$ | mJ/mm$^3$ | 0.503 | 1.50e2 | 4.07e2 |

TABLE 9.3 – Paramètres du critère énergétique modifié pour différentes conditions environnementales.




(a) 23 ˚C, RH50 (b) 140 ˚C, DAM

FIGURE 9.20 – Application du critère énergétique modifié sur les éprouvettes LBF sollicitées en fatigue en conditions standard ou à 140 ˚C.

$\mathcal{H}$=60 %), prend au contraire des valeurs élevées lorsque l'on étudie les éprouvettes avec accidents de forme. Dans ce second cas, cela signifie au contraire que c'est essentiellement l'énergie dissipée par mécanismes viscoélastiques qui pilote la tenue en fatigue. Lors de notre analyse menés au chapitre 8, nous avions également obtenu des valeurs assez différentes entre les conditions DAM et RH50. Cette remarque remet complètement en question la pertinence du critère énergétique modifié. En effet, il est difficile d'expliquer physiquement des tendances aussi contradictoires entre les différents paramètres. Nous attribuons ainsi l'amélioration de la prédictivité de ce critère en comparaison avec le critère énergétique proposé uniquement par l'introduction d'un paramètre supplémentaire, $\alpha$. Au vu de ces résultats, le critère énergétique modifié n'a pas de justification physique et ne peut donc pas être retenu pour estimer la tenue en fatigue des thermoplastiques renforcés en fibres de verre courtes.

### 9.3.3 Bilan sur le critère de fatigue proposé

Au vu de l'ensemble des conditions d'essais testées dans ce chapitre, nous considérons que le critère énergétique est celui qui permet le meilleur compromis entre prédictivité sur un large champ d'applications et difficulté d'identification. En effet, il ne nécessite que deux paramètres, et est fondé sur $\Delta W_{\text{diss}}$ qui est une grandeur accessible par des mesures expérimentales lors d'un essai mécanique (pour des conditions de chargement simples). Nous avons montré la capacité de cette grandeur physique à décrire la sensibilité de la tenue en fatigue à la microstructure, au rapport de charge, aux effets d'entaille, et ceci pour différentes conditions environnementales. Les résultats du chapitre 8 laissent

également supposer que le critère énergétique est pertinent pour des chargements multiaxiaux.

Il serait pourtant prétentieux d'affirmer que le choix du critère énergétique clôt le problème de dimensionnement en fatigue des thermoplastiques renforcés en fibres de verre courtes. En effet, les résultats de validation sur mini-structures sont corrects mais présentent néanmoins une marge d'erreur bien plus importante que la dispersion naturelle en fatigue ; les essais avec différentes histoires de chargement montrent en outre que l'énergie dissipée totale comme indicateur de la tenue en fatigue peut conduire à un sur-dimensionnement des structures lors du passage d'une caractérisation à partir d'essais de fatigue sous chargements sinusoïdaux à une application pour des sollicitations rencontrées lors de la vie en service.

Nous avons travaillé dans ce chapitre à une échelle macroscopique. Or, la microstructure du matériau implique qu'il existe au moins deux autres échelles d'analyse potentiellement plus pertinentes, car plus proches de l'échelle des mécanismes d'amorçage. La première est l'échelle de la structure cœur-peau, qui suppose de calculer les grandeurs mécaniques $G_i$ dans une couche d'orientation relativement homogène. Cette idée, fondée sur une vision « stratifiée » du matériau, permettrait d'analyser les mécanismes tels que le cisaillement inter-couches ou propres à la zone de cœur [101]. La seconde échelle, plus fine, requiert l'usage de techniques de localisation de façon à quantifier les grandeurs mécaniques dans la phase fibre et dans la phase matrice. Les travaux de Klimkeit [112], qui a également proposé dans sa thèse d'utiliser un critère fondé sur le cisaillement et la pression hydrostatique moyennés par phase, montrent qu'une méthode de changement d'échelle dans le cadre élastique linéaire n'est pas suffisante pour apporter un gain sensible en matière de prédictivité. Des développements analytiques sophistiqués, inspirés des méthodes d'homogénéisation dans le domaine non linéaire, semblent alors incontournables pour réaliser un post-traitement du calcul macroscopique à l'échelle de la microstructure.

Nous mettons donc en évidence le lien fort qui existe entre la précision de la réponse mécanique cyclique et la prédictivité du critère de fatigue. Le modèle de comportement anisotrope non linéaire, développé en partie I, permet d'enrichir la réponse mécanique par la description des mécanismes dissipatifs à l'échelle macroscopique. Nous avons pu valoriser ces travaux en proposant un critère de fatigue énergétique, qui offre globalement de meilleurs résultats que les critères proposés jusqu'alors dans la littérature. Cependant, il nous semble maintenant que pour dépasser les limites de ce critère il soit nécessaire de raffiner la compréhension des mécanismes locaux de déformation des thermoplastiques renforcés en fibres de verre courtes.

# Conclusions générales & Perspectives

L'objectif de ces travaux de thèse était de proposer une méthode de dimensionnement à la fatigue des thermoplastiques renforcés en fibres de verre courtes. Nous nous sommes appuyés sur une base expérimentale étendue, menée sur le matériau de l'étude, un PA66-GF35 représentatif de nombreuses applications sur véhicules, notamment pour le circuit d'admission d'air. Dans une première partie, nous avons développé une loi de comportement non linéaire permettant de décrire la réponse mécanique cyclique des thermoplastiques chargés en étendant la modélisation à leur sensibilité aux conditions hygrothermiques et à la distribution d'orientation complexe induite par l'injection. Dans une seconde partie, nous avons proposé un critère de fatigue énergétique, fondé sur la dissipation d'énergie par cycle, qui offre une bonne estimation de la durée de vie pour de nombreuses conditions de sollicitations.

## Sur la loi de comportement

Une analyse des conditions de sollicitations sur véhicule, notamment à l'aide du développement d'un modèle de diffusion thermo-hygrométrique couplé, nous a permis de montrer la nécessité de décrire la réponse mécanique sur une large plage de conditions hygrothermiques. Nous avons notamment mis en évidence que les sollicitations mécaniques sur les pièces du circuit d'admission d'air peuvent être appliquées en-deçà et au-delà de la température de transition vitreuse : le modèle de comportement doit être suffisamment riche pour être à même de décrire une grande variété de mécanismes de déformation.

Nous avons pris le parti de développer une **loi de comportement phénoménologique**. Ce choix répond à la nécessité de pouvoir modéliser les caractéristiques non linéaires de la réponse mécanique cyclique tout en limitant la durée des simulations numériques sur structures industrielles. Dans un premier temps, une analyse mécanique sur un cas d'étude bien maîtrisé (éprouvettes de traction injectées en conditions standard) nous a permis de mettre en évidence les caractéristiques du comportement du PA66-GF35 étudié : viscoélasticité sur deux échelles de temps, viscoplasticité non linéaire couplée à un écrouissage cinématique non linéaire, adoucissement cyclique. Les équations du modèle proposé sont écrites dans un cadre tri-dimensionnel anisotrope. L'isotropie transverse des éprouvettes étudiées permet une écriture unidimensionnelle, à partir de laquelle une stratégie d'identification robuste est exposée, fondée sur le découplage des composantes de la déformation. Le modèle est validé sur des histoires de chargement cycliques complexes (paliers de fluage, relaxation ou recouvrance, vitesses et amplitudes de chargement variables), représentatives des sollicitations sur véhicule ; nous démontrons également sa capacité à estimer correctement les sources de dissipation et la réponse thermique pour des sollicitations monotones et cycliques.

Le premier axe de développement du modèle de comportement concerne l'application à des **conditions hygrothermiques variées**. Nous illustrons la pertinence du modèle développé, qui permet de

décrire avec succès la réponse mécanique sur une large plage de températures (de 23 à 140 °C) et de taux d'humidité (de 0 à 75 %). Nous proposons une loi d'équivalence température-humidité, qui réduit la double sensiblité hygrothermique à une dépendance au seul paramètre $T - T_g(\mathcal{H})$, l'écart à la température de transition vitreuse. Cette loi, identifiée à partir d'essais de DMA spécifiques (balayages en température effectués pour différents taux d'humidité), est validée avec succès dans le domaine non linéaire. Ces résultats, très intéressants en matière de simplification de la base expérimentale, permettent également d'interpréter les variations des paramètres du modèle de comportement en fonction des conditions environnementales, ce qui constitue un outil précieux de dimensionnement.

Le second axe de développement du modèle de comportement consiste en la prise en compte du **lien procédé-comportement**. En effet, la mise en forme par injection induit une forte hétérogénéité de la distribution d'orientation des fibres et par conséquent l'anisotropie de la réponse mécanique locale. Les logiciels de simulation d'injection ne décrivent en général la microstructure qu'au moyen du tenseur d'orientation d'ordre deux, $\underline{\underline{a}}^{\psi}$. Nous nous appuyons sur cette grandeur pour construire un tenseur élastique anisotrope $\mathbb{C}^e$ à l'aide des outils classiques d'homogénéisation dans le cadre linéaire, et en utilisant une équation de fermeture dont nous avons discuté la pertinence. Par ailleurs, nous proposons une dépendance de la norme de la contrainte viscoplastique équivalente sous la forme d'une fonction $\mathbb{P} = \mathbb{P}(\underline{\underline{a}}^{\psi})$. Cette fonction ne fait intervenir qu'un seul paramètre matériau supplémentaire, $k$. Nous montrons que l'identification du comportement sur une géométrie d'éprouvette permet alors de décrire la réponse mécanique anisotrope non linéaire pour des microstructures variées, caractérisées par leur tenseur d'orientation $\underline{\underline{a}}^{\psi}$.

Le modèle de comportement complet, anisotrope non linéaire (14 paramètres), est **validé sur structures**. Des éprouvettes avec accidents de forme, en conditions standard, sont un premier cas d'étude intéressant, pour lequel il est possible de contrôler précisément les chargements locaux et de mesurer les champs de déformation. L'hétérogénéité du champ d'orientation des fibres, ainsi que la concentration des contraintes, localement élevées, permet de mettre en évidence la pertinence du modèle proposé. Nous démontrons la nécessité d'intégrer à la fois l'influence de la microstructure sur la réponse mécanique ainsi que les composantes non linéaires du comportement. Nous illustrons ensuite la capacité du modèle à simuler la réponse mécanique d'une pièce industrielle complexe, le répartiteur d'air à l'admission, soumis à une pression interne cyclique dans des conditions de température élevée. Malgré la richesse du modèle de comportement proposé, les durées de calcul sont parfaitement compatibles avec le cadre industriel. La corrélation calcul-essai indique l'importance de la prise en compte de la distribution d'orientation des fibres ; le calcul de cette dernière lors de la simulation d'injection est donc un paramètre critique et doit être confirmé par des observations expérimentales.

## Sur le critère de fatigue

L'analyse de la littérature nous a permis de tirer plusieurs enseignements. Tout d'abord, l'hypothèse de stationnarité de la réponse mécanique cyclique du PA66-GF35 semble vérifiée, ce qui valide la **pertinence du découplage comportement-fatigue** de notre approche. Par ailleurs, malgré des publications assez nombreuses concernant la compréhension des mécanismes de propagation des fissures en fatigue, l'essentiel de la durée de vie est piloté par l'amorçage d'une macro-fissure : la rupture finale intervient sans dégradation significative des propriétés mécaniques macroscopiques, ou alors cette phase de propagation ne concerne qu'une faible fraction de la durée de vie. Les micro-mécanismes d'endommagement (cavitation et cisaillement matriciels) sont concentrés, à l'échelle de la microstructure, au voisinage des extrémités et du pourtour des fibres.

La loi de comportement développée dans la première partie permet d'analyser les résultats ex-

périmentaux publiés dans la littérature au sujet de la fatigue multiaxiale du PA66-GF35. Nous avons simulé les chargements cycliques dans deux conditions environnementales, et nous avons pu comparer les performances de différents critères de fatigue à partir de la connaissance des grandeurs mécaniques calculées en régime stationnaire. Ces critères sont proposés dans la littérature pour les thermoplastiques chargés, ou inspirés plus généralement des critères utilisés pour les matériaux métalliques. Nous montrons que **la densité d'énergie dissipée permet une bonne corrélation avec la durée de vie** pour de nombreuses conditions expérimentales : chargements multiaxiaux (éventuellement déphasés), différents rapports de charge, différentes microstructures. En particulier, nous mettons en évidence le fait que la bonne compréhension des mécanismes dissipatifs permet d'obtenir des résultats plus précis que le critère en densité d'énergie élastique proposé par Klimkeit [112], pourtant le plus intéressant de ceux proposés dans la littérature.

Une campagne expérimentale menée sur des éprouvettes avec différents états d'orientation permet de caractériser le critère énergétique sur le PA66-GF35 de l'étude, en conditions standard. Nous validons sur des éprouvettes injectées avec accidents de forme le critère proposé, après avoir pris soin de vérifier sur notre matériau les hypothèses de stationnarité de la réponse mécanique ainsi que les mécanismes d'amorçage et de propagation suggérés dans la littérature. Nous montrons que le critère énergétique s'applique également à haute température (140 °C), ce qui permet de compléter notre démarche de **validation sur structures**. Nous avons également testé la possiblité d'améliorer nos résultats à l'aide d'un critère distinguant les composantes viscoélastiques et viscoplastiques de l'énergie dissipée. Malgré une estimation affinée de la durée de vie, nous signalons le manque de sens physique des évolutions des paramètres de ce critère énergétique modifié. **Nous préconisons donc l'emploi du critère énergétique comme meilleur compromis à ce stade pour prédire la tenue en fatigue du PA66-GF35.**

## Perspectives

Nous avons balayé lors de nos travaux plusieurs problématiques, ce qui nous a permis de soulever de nombreuses perspectives, dont nous résumons ici les principales.

Nous estimons que la première des perspectives de ces travaux est de finaliser un cas d'étude concret, de façon à mettre en lumière les améliorations incontournables à une application fiable de notre démarche en bureau d'études industriel. En effet, il est indispensable de valider le degré nécessaire et suffisant de précision et de finesse de modélisation d'une approche de dimensionnement pour un **cas d'application industrielle**. Nous avons développé dans nos travaux tous les outils pour réaliser un tel travail, et nous disposons de résultats expérimentaux sur un raccord de sortie du turbo du véhicule MCV DV4 sollicité et rompu en fatigue à 140 °C. Cependant, des détails techniques (incompatibilité entre le maillage en éléments coques pour l'injection et le maillage mécanique en éléments volumiques, mauvaise maîtrise des conditions aux limites lors des essais) en ont empêché la réalisation.

Nous avons mis en évidence le rôle critique joué par la **simulation d'injection** dans la chaîne de calcul numérique. Nous considérons donc qu'il est important de réaliser des observations de la distribution locale d'orientation des fibres de façon à vérifier la microstructure prédite par les logiciels tels que MOLDFLOW® et ainsi distinguer les sources d'erreur dans la prédiction de la réponse mécanique d'une pièce complexe. La microtomographie aux rayons X nous semble l'outil le plus prometteur pour réaliser ces observations, même si cela requiert le développement d'algorithmes d'analyse d'images. À une échelle plus fine, la microtomographie est également une piste très intéressante, car non-destructive, pour observer les mécanismes locaux d'endommagement en fatigue – bien que la

résolution actuelle des microtomographes limite grandement les volumes d'étude.

Le modèle de comportement proposé, bien que prédictif, souffre d'un défaut important qui mériterait d'être corrigé : la **réponse à la décharge**. Nous estimons que des travaux de modélisation devraient être poursuivis, à partir d'essais complémentaires comportant des phases de compression. En effet, ces essais pourraient guider une modélisation plus fine des mécanismes d'écrouissage ainsi que de la fonction de charge. Une fois ces améliorations apportées, il pourrait toutefois s'avérer nécessaire de faire également intervenir des mécanismes spécifiques à la décharge, liés à des évolutions microstructurales.

Concernant la prise en compte de la microstructure sur la réponse mécanique anisotrope, nous avons fait l'hypothèse que les composantes viscoélastiques de la déformation sont isotropes. Bien qu'au premier ordre cette approximation ne remette pas en question les résultats fournis par le modèle de comportement, nous estimons qu'il est possible de les améliorer en proposant une **modélisation anisotrope de la viscoélasticité**. Deux axes de développement nous semblent possibles. Le premier, phénoménologique, consisterait en la construction de tenseurs viscoélastiques $\mathbb{C}^{v_i}$ et $\mathbb{H}^{v_i}$ (généralisation tri-dimensionnelle du paramètre $\eta_i$) anisotropes, sur le modèle du tenseur $\mathbb{P}(\underline{\underline{a}}^{\psi})$. Un autre point de vue s'appuierait sur les méthodes d'homogénéisation dans le cadre viscoélastique linéaire, de façon à construire analytiquement les opérateurs viscoélastiques à partir des propriétés matricielles.

Nous avons évoqué l'intérêt de proposer un **critère de fatigue s'appuyant sur la microstructure locale**. La première échelle est celle de la structure cœur-peau, où l'analyse des mécanismes d'endommagement pourrait s'inspirer des travaux réalisés pour les composites stratifiés, notamment en ce qui concerne les mécanismes d'endommagement à l'interface entre les couches. Par ailleurs, un critère multi-échelles, décrivant les mécanismes d'endommagement locaux à l'aide de techniques de localisation (dissipation localement viscoplastique – à l'extrémité des fibres – pour une réponse viscoélastique à l'échelle macroscopique par exemple), semble une piste intéressante pour modéliser les phénomènes d'amorçage à une échelle pertinente. Néanmoins, ces deux idées ne pourront prendre de sens que si nous sommes en mesure de garantir une bonne description de la microstructure locale.

Enfin, nos travaux n'ont été appliqués qu'à un seul matériau, le PA66-GF35. Nous sommes confiants quand au fait que la démarche développée dans ce manuscrit puisse s'appliquer à d'autres thermoplastiques injectés renforcés de fibres de verre courtes, sous la condition que les mécanismes de déformation et d'endommagement soient similaires. Il serait donc intéressant de démontrer le **caractère de généralité de notre approche** en étudiant différents composites employés couramment sur véhicule : dans un premier temps en faisant varier le taux de fibres (application au PA66-GF50 par exemple, matériau sur lequel portent les travaux d'une thèse en cours [101]) puis en s'intéressant à d'autres matrices semi-cristallines (polypropylène, etc).

# Bibliographie


[1] ADVANI S.G. ET TUCKER III C.L. The use of tensors to describe and predict fiber orientation in short fiber composites. *Journal of Rheology*, 31:751, 1987.

[2] AFNOR . Plastiques - détermination des propriétés en traction. *Norme européenne, norme française*, ISO 527-2, 1996.

[3] AFNOR . Plastiques - polyamides - conditionnement accéléré d'éprouvettes. *Norme européenne, norme française*, ISO 1110, 1998.

[4] AMBRICO J.M. ET BEGLEY M.R. Plasticity in fretting contact. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 48(11):2391–2417, 2000.

[5] AMIABLE S., CHAPULIOT S., CONSTANTINESCU A., ET FISSOLO A. A comparison of lifetime prediction methods for a thermal fatigue experiment. *International Journal of Fatigue*, 28(7):692–706, 2006.

[6] ANDRIYANA A., BILLON N., ET SILVA L. Mechanical response of a short fiber reinforced thermoplastic : Experimental investigation and continuum mechanical modeling. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 2010.

[7] ANDRIYANA A., SILVA L., ET BILLON N. Viscoelastic Characterization of Short Fibres Reinforced Thermoplastic in Tension and Shearing. *Applied Mechanics and Materials*, 24:419–423, 2010. ISSN 1662-7482.

[8] ARGON A.S., GALESKI A., ET KAZMIERCZAK T. Rate mechanisms of plasticity in semicrystalline polyethylene. *Polymer*, 46(25):11798–11805, 2005.

[9] ARMSTRONG P.J. ET FREDERICK C.O. A mathematical representation of the multiaxial bauschinger effect. *CEGB report*, RD/B/N731 (Berkeley Nuclear Laboratories), 1966.

[10] ARRUDA E.M., BOYCE M.C., ET JAYACHANDRAN R. Effects of strain rate, temperature and thermomechanical coupling on the finite strain deformation of glassy polymers. *Mechanics of Materials*, 19(2-3):193–212, 1995.

[11] AYOUB G., ZAÏRI F., NAÏT-ABDELAZIZ M., ET GLOAGUEN J.M. Modelling large deformation behaviour under loading–unloading of semicrystalline polymers : Application to a high density polyethylene. *International Journal of Plasticity*, 26(3):329–347, 2010.

[12] BAPTISTE D. *Continuum damage mechanics of materials and structures : Damage micromechanics modelling of discontinuous reinforced composites*. Elsevier Amsterdam, O. Allix et F. Hild édition, 2002.

[13] BARBOUCHI S., BELLENGER V., TCHARKHTCHI A., CASTAING PH., ET JOLLIVET T. Effect of water on the fatigue behaviour of a PA66/glass fibers composite material. *Journal of Materials Science*, 42:2181–2188, 2007.

[14] BARLAT F., ARETZ H., YOON J.W., KARABIN M.E., BREM J.C., ET DICK R.E. Linear transfomation-based anisotropic yield functions. *International Journal of Plasticity*, 21(5): 1009–1039, 2005. ISSN 0749-6419.

[15] BARTCZAK Z. ET GALESKI A. On the plastic deformation of the amorphous component in semicrystalline polymers. *Polymer*, 37(11):2113–2123, 1996.

[16] BAY R.S. ET TUCKER III C.L. Fiber orientation in simple injection moldings. Part I : Theory and numerical methods. *Polymer composites*, 13(4):317–331, 1992.

[17] BELLENGER V., TCHARKHTCHI A., ET CASTAING P. Thermal and mechanical fatigue of a PA66/glass fibers composite material. *International Journal of Fatigue*, 28(10):1348–1352, 2006.

[18] BEN HADJ HAMOUDA H., LAIARINANDRASANA L., ET PIQUES R. Viscoplastic behaviour of a medium density polyethylene (MDPE) : Constitutive equations based on double nonlinear deformation model. *International Journal of Plasticity*, 23(8):1307–1327, 2007.

[19] BENOIT A., MAITOURNAM M.H., RÉMU L., ET OGER F. Cyclic behaviour of structures under thermomechanical loadings : application to exhaust manifolds. *International Journal of Fatigue*, *soumis pour publication*, 2011.

[20] BENVENISTE Y. A new approach to the application of Mori-Tanaka's theory in composite materials. *Mechanics of Materials*, 6(2):147–157, 1987.

[21] BENVENISTE Y., DVORAK G.J., ET CHEN T. On diagonal and elastic symmetry of the approximate effective stiffness tensor of heterogeneous media. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 39(7):927–946, 1991.

[22] BERGERET A., PIRES I., FOULC M.P., ABADIE B., FERRY L., ET CRESPY A. The hygrothermal behaviour of glass fibre reinforced thermoplastic composites. *Polymer Testing*, 20:753–763, 2001.

[23] BERNASCONI A., COSMI F., ET DREOSSI D. Local anisotropy analysis of injection moulded fibre reinforced polymer composites. *Composites Science and Technology*, 2008.

[24] BERNASCONI A., DAVOLI P., BASILE A., ET FILIPPI A. Effect of fibre orientation on the fatigue behaviour of a short glass fibre reinforced polyamide-6. *International Journal of Fatigue*, 29(2):199–208, 2007.

[25] BERNASCONI A., DAVOLI P., ROSSIN D., ET ARMANNI C. Effect of reprocessing on the fatigue strength of a fibreglass reinforced polyamide. *Composites Part A*, 38(3):710–718, 2007.

[26] BERNASCONI A. ET KULIN R.M. Effect of Frequency Upon Fatigue Strength of a Short Glass Fiber Reinforced Polyamide 6 : A Superposition Method Based on Cyclic Creep Parameters. *Polymer composites*, 2008.

[27] BESSON J., CAILLETAUD G., CHABOCHE J. L., ET FOREST S. *Mécanique non linéaire des matériaux*. Hermès Science, 2001.

[28] BOISOT G. *Mécanismes et modélisation mécanique de la déformation, de l'endommagement et de la rupture du PolyAmide 11 pur et renforcé choc*. Thèse de doctorat, ENSMP, Paris, 2009.

[29] BORNERT M., BRETHEAU T., ET GILORMINI P. *Homogénéisation en mécanique des matériaux (v. 1&2)*. Hermès Science, 2001.

[30] BOUAZIZ A., ZAIRI F., NAÏT-ABDELAZIZ M., GLOAGUEN J.M., ET LEFEBVRE J.M. Micromechanical modelling and experimental investigation of random discontinuous glass fiber polymer–matrix composites. *Composites Science and Technology*, 67(15-16):3278–3285, 2007.

[31] BOWDEN P.B. ET YOUNG R.J. Deformation mechanisms in crystalline polymers. *Journal of Materials Science*, 9(12):2034–2051, 1974.

[32] BOYCE M.C., SOCRATE S., ET LLANA P.G. Constitutive model for the finite deformation stress–strain behavior of poly (ethylene terephthalate) above the glass transition. *Polymer*, 41 (6):2183–2201, 2000.

[33] BUABAS M. *Étude physique et numérique de la distribution des fibres dans le PA fibré : validité des orientations calulculées par l'outil de simulation numérique Moldflow*. Rapport confidentiel, AEDINCA, 2009.

[34] CAMACHO C.W., TUCKER III C.L., YALVAC S., ET MCGEE R.L. Stiffness and thermal expansion predictions for hybrid short ffiber composites. *Polymer Composites*, 11(4):229–39, 1990.

[35] CARREGA M. *Matériaux polymères*. Dunod, 2000.

[36] CASADO J.A., CARRASCAL I., POLANCO J.A., ET GUTIÉRREZ-SOLANA F. Fatigue failure of short glass fibre reinforced PA 6.6 structural pieces for railway track fasteners. *Engineering Failure Analysis*, 13(2):182–197, 2006.

[37] CASTAGNET S. High-temperature mechanical behavior of semi-crystalline polymers and relationship to a rubber-like "relaxed" state. *Mechanics of Materials*, 41(2):75–86, 2009.

[38] CHABOCHE J.L. On some modifications of kinematic hardening to improve the description of ratchetting effects. *International Journal of Plasticity*, 7(7):661–678, 1991. ISSN 0749-6419.

[39] CHABOCHE J.L. Thermodynamic formulation of constitutive equations and application to the viscoplasticity and viscoelasticity of metals and polymers. *International Journal of Solids and Structures*, 34(18):2239–2254, 1997.

[40] CHARKALUK E. ET CONSTANTINESCU A. An energetic approach in thermomechanical fatigue for silicon molybdenum cast iron. *Materials at High Temperatures*, 17(3):373–380, 2000.

[41] CHEN C.H. ET CHENG C.H. Effective elastic moduli of misoriented short-fiber composites. *International Journal of Solides and Structures*, 33(17):2519–2539, 1996.

[42] CHOU T.W., NOMURA S., ET TAYA M. A Self-Consistent Approach to the Elastic Stiffness of Short-Fiber Composites. *Journal of Composite Materials*, 14(3):178, 1980.

[43] CHRYSOCHOOS A., CHEZEAUX J.C., ET CAUMON H. Analyse thermomécanique des lois de comportement par thermographie infrarouge. *Revue de Physique Appliquée*, 24(2):215–225, 1989.

[44] CHUNG D.H. ET KWON T.H. Improved model of orthotropic closure approximation for flow induced fiber orientation. *Polymer Composites*, 22(5):636–649, 2001. ISSN 1548-0569.

[45] CINTRA J.S. ET TUCKER III C.L. Orthotropic closure approximations for flow-induced fiber orientation. *Journal of Rheology*, 39(6):1095–1122, 1995. ISSN 0148-6055.

[46] COFFIN L.F. A study of the effects of cyclic thermal stresses on a ductile material. *Trans. ASME*, 76:931–950, 1954.

[47] COHARD M. *Cours de transferts thermiques*. IUP de génie civil, Grenoble, 2002.

[48] COLAK O.U. Modeling deformation behavior of polymers with viscoplasticity theory based on overstress. *International Journal of Plasticity*, 21(1):145–160, 2005.

[49] CONSTANTINESCU A., DANG VAN K., ET MAITOURNAM M.H. A unified approach for high and low cycle fatigue based on shakedown concepts. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, 26(6):561–568, 2003.

[50] COSMI F., BERNASCONI A., ET SODINI N. Phase contrast micro-tomography and morphological analysis of a short carbon fiber reinforced polyamide. *Composites Science and Technology*, 71:23–30, 2011.

[51] CRANK J. *The Mathematics of Diffusion*. Clarendon, Oxford, 1975.

[52] DANG VAN K., BIGNONNET A., FAYARD J.L., ET JANOSCH J.J. Assessment of welded structures by a local multiaxial fatigue approach. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, 24(5):369–376, 2001.

[53] DE MONTE M., MOOSBUGGER E., JASCKEK K., ET QUARESIMIN M. Multiaxial fatigue of a short fibre reinforced polyamide 6.6 – Fatigue and fracture behaviour. *International Journal of Fatigue*, 32:17–28, 2010.

[54] DE MONTE M., MOOSBUGGER E., ET QUARESIMIN M. Influence of temperature and thickness on the off-axis behaviour of short glass fibre reinforced polyamide 6.6 – cyclic loading. *Composites : Part A*, 41:1368–79, 2010.

[55] DE MONTE M., QUARESIMIN M., ET LAZZARIN P. Modelling of fatigue strength data for a short fibre reinforced polyamide 6.6 based on local strain energy density. In *International Conference on Composites Materials*, Kyoto, 2007.

[56] DELOBELLE P., ROBINET P., GEYER P., ET BOUFFIOUX P. A model to describe the anisotropic viscoplastic behaviour of Zircaloy-4 tubes. *Journal of Nuclear Materials*, 238(2-3):135–162, 1996. ISSN 0022-3115.

[57] DÉTREZ F. *Nanomécanismes de déformation des polymères semi-cristallins*. Thèse de doctorat, Université des Sciences et Technologie de Lille, Lille, 2008.

[58] DOGHRI I. ET FRIEBEL C. Effective elasto-plastic properties of inclusion-reinforced composites. Study of shape, orientation and cyclic response. *Mechanics of Materials*, 37(1):45–68, 2005.

[59] DOGHRI I. ET OUAAR A. Homogenization of two-phase elasto-plastic composite materials and structures. Study of tangent operators, cyclic plasticity and numerical algorithms. *International Journal of Solids and Structures*, 40(7):1681–1712, 2003.

[60] DOGHRI I. ET TINEL L. Micromechanical modeling and computation of elasto-plastic materials reinforced with distributed-orientation fibers. *International Journal of Plasticity*, 21 (10):1919–1940, 2005.

[61] DOGHRI I. ET TINEL L. Micromechanics of inelastic composites with misaligned inclusions : Numerical treatment of orientation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195(13-16):1387–1406, 2006. ISSN 0045-7825.

[62] DOI M. Molecular dynamics and rheological properties of concentrated solutions of rodlike polymers in isotropic and liquid crystalline phases. *Journal of Polymer Science : Polymer Physics Edition*, 19(2):229–243, 1981. ISSN 1542-9385.

[63] DRAY D., GILORMINI P., ET RÉGNIER G. Comparison of several closure approximations for evaluating the thermoelastic properties of an injection molded short-fiber composite. *Composites Science and Technology*, 67(7-8):1601–1610, 2007.

[64] DRAY BENSAHKOUN D. *Prédiction des propriétés thermo-élastiques d'un composite injecté et chargé de fibres courtes*. Thèse de doctorat, ENSAM, 2006.

[65] DROZDOV A.D., AL-MULLA A., ET GUPTA R.K. The viscoelastic and viscoplastic behavior of polymer composites : polycarbonate reinforced with short fibers. *Computational Materials Science*, 28:16–30, 2003.

[66] DROZDOV A.D., AL-MULLA A., ET GUPTA R.K. Finite viscoplasticity of polycarbonate reinforced with short glass fibers. *Mechanics of Materials*, 37(4):473–491, 2005.

[67] DROZDOV A.D. ET CHRISTIANSEN J. Modelling the viscoplastic response of polyethylene in uniaxial loading-unloading tests. *Mechanics Research Communications*, 30(5):431–442, 2003.

[68] DVORAK G.J. ET BENVENISTE Y. On transformation strains and uniform fields in multiphase elastic media. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A : Mathematical and Physical Sciences*, 437(1900):291, 1992.

[69] ESHELBY J.D. The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences (1934-1990)*, 241(1226):376–396, 1957.

[70] ETIENNE S. ET DAVID L. *Introduction à la physique des polymères*. Dunod, 1994.

[71] FARES Y., CHAUSSUMIER M., DAIDIÉ A., ET GUILLOT J. Determining the life cycle of bolts using a local approach and the Dang Van criterion. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, 29(8):588–596, 2006.

[72] FOLGAR F. ET TUCKER III C.L. Orientation behavior of fibers in concentrated suspensions. *Journal of reinforced plastics and composites*, 3(2):98, 1984.

[73] FOND C. ET G'SELL C. Localisation des déformations et mécanismes d'endommagement dans les polymères multiphasés. *Mécanique & Industries*, 3(5):431–438, 2002.

[74] FOULC M.P., BERGERET A., FERRY L., IENNY P., ET CRESPY A. Study of hygrothermal ageing of glass fibre reinforced PET composites. *Polymer Degradation and Stability*, 89(3): 461–470, 2005.

[75] GAIER C., UNGER B., ET DANNBAUER H. Multiaxial fatigue analysis of orthotropic materials. *Revue de Métallurgie*, 107(9):369–375, 2010.

[76] GERMAIN P., SUQUET P., ET NGUYEN Q.S. Continuum thermodynamics. *ASME, Transactions, Journal of Applied Mechanics*, 50(4):1010–1020, 1983. ISSN 0021-8936.

[77] GHORBEL E. A viscoplastic constitutive model for polymeric materials. *International Journal of Plasticity*, 24(11):2032–2058, 2008.

[78] GIJSMAN P. Review on the thermo-oxidative degradation of polymers during processing and in service. *e-Polymers*, 1(65), 2008.

[79] G'SELL C. ET HAUDIN J.M. *Introduction à la mécanique des polymères*. INPL, 1995.

[80] GUÉRIN B. Polyamides. *Techniques de l'ingénieur. Plastiques et composites*, 2(A3360):1–22, 1994.

[81] HALPHEN B. ET NGUYEN Q.S. Sur les matériaux standards généralisés. *Journal de Mécanique*, 14(1):39–63, 1975.

[82] HAND G.L. A theory of anisotropic fluids. *Journal of Fluid Mechanics*, 13(01):33–46, 1962. ISSN 0022-1120.

[83] HANDA K., KATO A., ET NARISAWA I. Fatigue Characteristics of a Glass-Fiber-Reinforced Polyamide. *Journal of Applied Polymer Science*, 72:1783–1793, 1999.

[84] HARTMANN J. ET BÜTER A. *Fatigue of short fibre reinforced plastic specimens*. Confidential report, Fraunhofer Institut für Betriebfestigkeit und Systemzuverlässigkeit LBF, 2010.

[85] HASHIN Z. ET SHTRIKMAN S. A variational approach to the theory of the elastic behavior of multiphase materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 11(2):127–140, 1963.

[86] HAUDIN J.M. *Mise en forme des polymères, cours du CEMEF*. Centre de Mise en Forme des Matériaux, 1992.

[87] HERMAN W.A., HERTZBERG R.W., ET MANSON J.A. The influence of loading history on fatigue in engineering plastics. *Journal of Materials Science*, 25(1):434–440, 1990.

[88] HERNANDEZ R.J., GIACIN J.R., ET GRULKE E.A. The sorption of water vapor by an amorphous polyamide. *Journal of membrane science*, 65(1-2):187–199, 1992.

[89] HERTZBERG R.W., MANSON J.A., ET SKIBO M. Frequency sensitivity of fatigue processes in polymeric solids. *Polymer Engineering and Science*, 15(4):252–260, 1975.

[90] HILL R. A theory of the yielding and plastic flow of anisotropic metals. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 193(1033):281–297, 1948.

[91] HILL R. A self-consistent mechanics of composite materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 13(4):213–222, 1965.

[92] HILL R. Continuum micro-mechanics of elasto-plastic polycrystals. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 13(2):89–101, 1965.

[93] HIZOUM K., RÉMOND Y., BAHLOULI N., OSHMYAN V., PATLAZHAN S., ET AHZI S. Non Linear Strain Rate Dependency and Unloading Behavior of Semi-Crystalline Polymers. *Oil & Gas Science and Technology-Revue de l'IFP*, 61(6):743–749, 2006.

[94] HO K. ET KREMPL E. Extension of the viscoplasticity theory based on overstress (VBO) to capture non-standard rate dependence in solids. *International Journal of Plasticity*, 18(7):851–872, 2002.

[95] HORST J. J. ET SPOORMAKER J. L. Mecanisms of fatigue in short glass fiber reinforced polyamide 6. *Polymer Engineering and Science*, 36:2718–26, 1996.

[96] HORST J.J., SALIENKO N.V., ET SPOORMAKER J.L. Fibre-matrix debonding stress analysis for short fibre-reinforced materials with matrix plasticity, finite element modelling and experimental verification. *Composites Part A*, 29(5-6):525–531, 1998.

[97] HORST J.J. ET SPOORMAKER J.L. Fatigue fracture mechanisms and fractography of short-glassfibre-reinforced polyamide 6. *Journal of Materials Science*, 32(14):3641–3651, 1997.

[98] JABBADO M. ET MAITOURNAM M.H. A high-cycle fatigue life model for variable amplitude multiaxial loading. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, 31(1):67–75, 2008.

[99] JACK D.A. ET SMITH D.E. The effect of fibre orientation closure approximations on mechanical property predictions. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 38 (3):975–982, 2007. ISSN 1359-835X.

[100] JEFFERY G.B. The motion of ellipsoidal particles immersed in a viscous fluid. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, 102(715):161–179, 1922.

[101] JÉGOU L. *Influence des paramètres du procédé sur la fatigue des thermoplastiques fibrés pour application structurale*. Thèse de doctorat, Université de Bretagne Occidentale, En cours de rédaction.

[102] JEN M.H.R. ET LEE C.H. Strength and life in thermoplastic composite laminates under static and fatigue loads. part i : Experimental. *International journal of fatigue*, 20(9):605–615, 1998.

[103] JIA N. ET KAGAN V.A. Effects of Time and Temperature on the Tension-Tension Fatigue Behavior of Short Fiber Reinforced Polyamides. *Polymer Composites*, 19(4):408–414, 1998.

[104] JOHNSON K.L. The application of shakedown principles in rolling and sliding contact. *European Journal of Mechecanics. A/Solids, Special Issue*, 11(155-172):188, 1992.

[105] JU J.W., KO Y.F., ET RUAN H.N. Effective Elastoplastic Damage Mechanics for Fiber-reinforced Composites with Evolutionary Complete Fiber Debonding. *International Journal of Damage Mechanics*, 15(3):237, 2006.

[106] KANG G. Ratchetting : Recent progresses in phenomenon observation, constitutive modeling and application. *International Journal of Fatigue*, 30(8):1448–1472, 2008. ISSN 0142-1123.

[107] KARGER-KOCSIS J. Effects of processing induced microstructure on the fatigue crack propagation of unfilled and short fibre-reinforced PA-6. *Composites*, 21:243–254, 1990.

[108] KAROLCZUK A., NADOT Y., ET DRAGON A. Non-local stress gradient approach for multiaxial fatigue of defective material. *Computational Materials Science*, 44(2):464–475, 2008.

[109] KETTLE G.J. Variation of the glass transition temperature of nylon-6 with changing water content. *Polymer*, 18(7):742–743, 1977. ISSN 0032-3861.

[110] KICHENIN J. *Comportement thermomécanique du polyéthylène : application aux structures gazières*. Thèse de doctorat, Ecole Polytechnique, LMS, 1992.

[111] KICHENIN J., DANG VAN K., ET BOYTARD K. Finite-element simulation of a new two-dissipative mechanisms model for bulk medium-density polyethylene. *Journal of Materials Science*, 31(6):1653–1661, 1996.

[112] KLIMKEIT B. *Etude expérimentale et modélisation du comportement en fatigue multiaxiale d'un polymère renforcé pour application automobile*. Thèse de doctorat, ENSMA, 2009.

[113] KLIMKEIT B., CASTAGNET S., NADOT Y., EL HABIB A., BENOIT G., BERGAMO S., DUMAS C., ET ACHARD S. Fatigue damage mechanisms in short fiber reinforced PBT+PET GF30. *Mechanical Science and Engineering A*, 528:1577–88, 2011.

[114] KLIMKEIT B., NADOT Y., CASTAGNET S., NADOT-MARTIN C., DUMAS C., BERGAMO S., SONSINO C.M., ET BÜTER A. Multiaxial fatigue life assessment for reinforced polymers. *International Journal of Fatigue*, 33:766–80, 2011.

[115] KREMPL E. ET KHAN F. Rate (time)-dependent deformation behavior : an overview of some properties of metals and solid polymers. *International Journal of Plasticity*, 19(7):1069–1095, 2003.

[116] KUJAWSKI D. ET ELLYIN F. A unified approach to mean stress effect on fatigue threshold conditions. *International Journal of Fatigue*, 17(2):101–106, 1995.

[117] LAHELLEC N. ET SUQUET P. On the effective behavior of nonlinear inelastic composites : I. Incremental variational principles. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 55(9):1932–1963, 2007.

[118] LAHELLEC N. ET SUQUET P. On the effective behavior of nonlinear inelastic composites : II A second-order procedure. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 55(9):1964–1992, 2007.

[119] LAI D., YAKIMETS I., ET GUIGON M. A non-linear viscoelastic model developed for semi-crystalline polymer deformed at small strains with loading and unloading paths. *Materials Science and Engineering : A*, 405(1-2):266–271, 2005.

[120] LANG R.W. ET MANSON J.A. Crack tip heating in short-fibre composites under fatigue loading conditions. *Journal of Materials Science*, 22(10):3576–3580, 1987.

[121] LANG R.W., MANSON J.A., ET HERTZBERG R.W. Mechanisms of fatigue fracture in short glass fibre-reinforced polymers. *Journal of Materials Science*, 22(11):4015–4030, 1987.

[122] LAUNAY A., MAITOURNAM M.H., MARCO Y., ET RAOULT I. Multiaxial fatigue models for short glass fiber reinforced polyamide : constitutive behaviour and lifetime. *International Journal of Fatigue*, *soumis pour publication*, 2011.

[123] LAUNAY A., MAITOURNAM M.H., MARCO Y., RAOULT I., ET SZMYTKA F. Cyclic behavior of short glass fiber reinforced polyamide : experimental study and constitutive equations. *International Journal of Plasticity*, 27(8):1267–93, 2011.

[124] LE TAVERNIER J.C., BIGOT J.C., ET LETOURNEL J. *La plasturgie en chiffres*. Rapport du SESSI, Ministère Français de l'Industrie, 2008.

[125] LEMAITRE J. ET CHABOCHE J.L. *Mécanique des matériaux solides*. Dunod, 1985.

[126] LÉVESQUE M. *Modélisation du comportement mécanique de matériaux composites visco-élastiques non linéaires par une approche d'homogénéisation*. Thèse de doctorat, ENSAM, 2004.

[127] LI J. ET WENG G.J. A secant-viscosity approach to the time-dependent creep of an elastic viscoplastic composite. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 45(7):1069–1083, 1997.

[128] LI J. ET WENG G.J. A Unified Approach From Elasticity to Viscoelasticity to Viscoplasticity of Particle-Reinforced Solids. *International Journal of Plasticity*, 14(1):193–208, 1998.

[129] LIELENS G., PIROTTE P., COUNIOT A., DUPRET F., ET KEUNINGS R. Prediction of thermo-mechanical properties for compression moulded composites. *Composites Part A*, 29(1-2):63–70, 1998.

[130] LIN L. ET ARGON A.S. Structure and plastic deformation of polyethylene. *Journal of Materials Science*, 29(2):294–323, 1994.

[131] LYONS J.S. Time and temperature effects on the mechanical properties of glass-filled amide-based thermoplastics. *Polymer Testing*, 17(4):237–245, 1998.

[132] MAITOURNAM M.H. *Mécanique des structures anélastiques : comportement, chargements cycliques et fatigue*. École Polytechnique, Palaiseau, 2008.

[133] MAITOURNAM M.H., DANG VAN K., ET FLAVENOT J.F. Fatigue design of notched components with stress gradient and cyclic plasticity. In *Journées de Printemps*, Paris, 2008.

[134] MAITOURNAM M.H., KREBS C., ET GALTIER A. A multiscale fatigue life model for complex cyclic multiaxial loading. *International Journal of Fatigue*, 33(2):232–240, 2011.

[135] MALLICK P.K. ET ZHOU Y. Effect of mean stress on the stress-controlled fatigue of a short E-glass fiber reinforced polyamide-6, 6. *International Journal of Fatigue*, 26(9):941–946, 2004.

[136] MANDELL J.F. *Fatigue Behavior of Short Fiber Composite Materials*, volume 4 de *Composite Materials Series*. Elsevier New-York, K.L. Reifsnider édition, 1991.

[137] MANSON S.S. Behaviour of materials under conditions of thermal stress. *NACA Technical Report No. 2933*, 1170:317–350, 1953.

[138] MARCO Y. *Caractérisation multi-axiale du comportement et de la micro-structure d'un semi-cristallin : application au cas du P.E.T.* Thèse de doctorat, E.N.S Cachan, Cachan, 2003.

[139] MASSON R., BORNERT M., SUQUET P., ET ZAOUI A. An affine formulation for the prediction of the effective properties of nonlinear composites and polycrystals. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 48(6-7):1203–1227, 2000.

[140] MEGALLY A. *Étude et modélisation de l'orientation de fibres dans des thermoplastiques renforcés*. Thèse de doctorat, ENSMP, 2005.

[141] MERAGHNI F., DESRUMAUX F., ET BENZEGGAGH M.L. Implementation of a constitutive micromechanical model for damage analysis in glass mat reinforced composite structures. *Composites science and technology*, 62(16):2087–2097, 2002.

[142] MERDAS I., THOMINETTE F., TCHARKHTCHI A., ET VERDU J. Factors governing water absorption by composite matrices. *Composites Science and Technology*, 62(4):487–492, 2002.

[143] MICHEL J.C. ET SUQUET P. Nonuniform transformation field analysis. *international Journal of Solids and Structures*, 40(25):6937–6955, 2003.

[144] MIRI V., PERSYN O., LEFEBVRE J.M., ET SEGUELA R. Effect of water absorption on the plastic deformation behavior of nylon 6. *European Polymer Journal*, 45(3):757–762, 2009.

[145] MLEKUSCH B. Thermoelastic properties of short-fibre-reinforced thermoplastics. *Composites Science and Technology*, 59:911–923, 1999.

[146] MORI T. ET TANAKA K. Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions. *Acta Metallurgica*, 21:571, 1973.

[147] MORROW J. D. Cyclic plastic strain energy and fatigue of metals. *American Society of Testing Materials*, pages 45–87, 1965.

[148] MOURGLIA SEIGNOBOS E. *Compréhension des mécanismes physiques de fatigue dans le polyamide vierge et renforcé de fibres de verre*. Tèse de doctorat, INSA de Lyon, 2009.

[149] NEMAT-NASSER S. ET HORI M. *Micromechanics : overall properties of heterogeneous materials*. Elsevier, 1999.

[150] NODA K., TAKAHARA A., ET KAJIYAMA T. Fatigue failure mechanisms of short glass-fiber reinforced nylon 66 based on nonlinear dynamic viscoelastic measurement. *Polymer*, 42 (13):5803–5811, 2001.

[151] NOURI H., MERAGHNI F., ET LORY P. Fatigue damage model for injection-molded short glass fibre reinforced thermoplastics. *International Journal of Fatigue*, 31(5):934–942, 2009.

[152] OHNO N. ET WANG J.D. Kinematic hardening rules with critical state of dynamic recovery, part I : formulation and basic features for ratchetting behavior. *International Journal of Plasticity*, 9(3):375–390, 1993. ISSN 0749-6419.

[153] OLIVIER G.. *Anisotropic metric-based mesh adaptation for unsteady CFD simulations involving moving geometries*. Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie, 2011.

[154] OLLER S., CAR E., ET LUBLINER J. Definition of a general implicit orthotropic yield criterion. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 192(7-8):895–912, 2003.

[155] OSHMYAN V.G., PATLAZHAN S.A., ET RÉMOND Y. Simulation of small-strain deformations of semi-crystalline polymer : Coupling of structural transformations with stress-strain response. *Journal of Materials Science*, 39(11):3577–3586, 2004.

[156] OSHMYAN V.G., PATLAZHAN S.A., ET RÉMOND Y. Principles of structural-mechanical modeling of polymers and composites. *Polymer Science Series A*, 48(9):1004–1013, 2006.

[157] OUDET C. *Polymères : structure et propriétés*. Masson, 1994.

[158] PAPADOPOULOS I.V., DAVOLI P., GORLA C., FILIPPINI M., ET BERNASCONI A. A comparative study of multiaxial high-cycle fatigue criteria for metals. *International Journal of Fatigue*, 19(3):219–235, 1997.

[159] PAPADOPOULOS I.V. ET PANOSKALTSIS V.P. Invariant formulation of a gradient dependent multiaxial high-cycle fatigue criterion. *Engineering fracture mechanics*, 55(4):513–528, 1996.

[160] PARENTEAU T. *Modélisation micromécanique de composites thermoplastiques élastomères à matrice polypropylène*. Thèse de doctorat, Université de Bretagne-Sud, 2009.

[161] PARENTEAU T., AUSIAS G., MAUVOISIN G., GROHENS Y., ET PILVIN P. Apport des essais d'indentation pour la modélisation du comportement mécanique d'un polymère semi-cristallin. *Matériaux & Techniques*, 96(Hors Série):95–103, 2008.

[162] PEGORETTI A., GUARDINI A., MIGLIARESI C., ET RICCO T. Investigation of nonelastic response of semicrystalline polymers at high strain levels. *Journal of Applied Polymer Science*, 78(9):1664–1670, 2000.

[163] PEGORETTI A. ET RICCO T. Fatigue Fracture of Neat and Short Glass Fiber Reinforced Polypropylene : Effect of Frequency and Material Orientation. *Journal of Composite Materials*, 34(12):1009–1027, 2000.

[164] PEGORETTI A. ET RICCO T. Creep crack growth in a short glass fibres reinforced polypropylene composite. *Journal of Materials Science*, 36(19):4637–4641, 2001.

[165] PÉTRAULT D. *Etude du comportement en fatigue du polyamide 6*. Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure de Mécanique et d'Aéronautique, 1992.

[166] PIERARD O. ET DOGHRI I. An enhanced affine formulation and the corresponding numerical algorithms for the mean-field homogenization of elasto-viscoplastic composites. *International Journal of Plasticity*, 22(1):131–157, 2006.

[167] PIERARD O., FRIEBEL C., ET DOGHRI I. Mean Field homogenization of multi-phase thermo-elastic composites : a general framework and its validation. *Composites Science and Technology*, 64(10-11):1587–1603, 2004.

[168] POITOU A., AMMAR A., MARCO Y., CHEVALIER L., ET CHAOUCHE M. Crystallization of polymers under strain : from molecular properties to macroscopic models. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 192(28-30):3245–3264, 2003.

[169] PONCELET M., DOUDARD C., CALLOCH S., WEBER B., ET HILD F. Probabilistic multiscale models and measurements of self-heating under multiaxial high cycle fatigue. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 58(4):578–593, 2010.

[170] PONTE CASTAÑEDA P. ET SUQUET P. Nonlinear composites. *Advances in Applied Mechanics*, 34:171–302, 1998.

[171] PONTE CASTAÑEDA P. ET WILLIS J.R. The effect of spatial distribution on the effective behavior of composite materials and cracked media. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 43(12):1919–1951, 1995.

[172] PUFFR R. ET ŠEBENDA J. On the structure and properties of polyamides. xxvii. the mechanism of water sorption in polyamides. *Journal of Polymer Science Part C : Polymer Symposia*, 16 (1):79–93, 1967.

[173] RAOULT I. *Structures élastomères sous chargement cyclique : Comportement - Fatigue - Durée de vie*. Thèse de doctorat, Ecole Polytechnique, Palaiseau, 2005.

[174] REGRAIN C., LAIARINANDRASANA L., TOILLON S., ET SAÏ K. Multi-mechanism models for semi-crystalline polymer : Constitutive relations and finite element implementation. *International Journal of Plasticity*, 25(7):1253–1279, 2009.

[175] REIMSCHUESSEL H.K. Relationships on the effect of water on glass transition temperature and young's modulus of nylon 6. *Journal of Polymer Science : Polymer Chemistry Edition*, 16 (6):1229–1236, 1978. ISSN 1542-9369.

[176] RÉMOND Y. Constitutive modelling of viscoelastic unloading of short glass fibre-reinforced polyethylene. *Composites Science and Technology*, 65(3-4):421–428, 2005.

[177] ROGUET E., CASTAGNET S., ET GRANDIDIER J.C. Mechanical features of the rubbery amorphous phase in tension and torsion in a semi-crystalline polymer. *Mechanics of Materials*, 39 (4):380–391, 2007.

[178] SATO N., KURAUCHI T., SATO S., ET KAMIGAITO O. Microfailure behaviour of randomly dispersed short fibre reinforced thermoplastic composites obtained by direct SEM observation. *Journal of Materials Science*, 26(14):3891–3898, 1991.

[179] SCHJØDT-THOMSEN J. ET PYRZ R. The Mori-Tanaka stiffness tensor : Diagonal symmetry, complex fibre orientations and non-dilute volume fractions. *Mechanics of materials*, 33(10): 531–544, 2001.

[180] SEFERIS J. C., CHUNG K., BUEHLER F. U., ET TAKATOYA T. Heat and water mass transfer modeling in polyimide based advanced composites. *Polymer degradation and stability*, 68 (1):43–51, 2000.

[181] SHU Y., YE L., ET YANG T. Study on the long-term thermal-oxidative aging behavior of polyamide 6. *Journal of Applied Polymer Science*, 110(2):945–957, 2008.

[182] SKELTON R. P. Energy criterion for high temperature low cycle fatigue. *Material Science and Technology*, 7(5):427–440, 1991.

[183] SMITH L.S.A. ET SCHMITZ V. The effect of water on the glass transition temperature of poly (methyl methacrylate). *Polymer*, 29(10):1871–1878, 1988. ISSN 0032-3861.

[184] SONSINO C.M. ET MOOSBRUGGER E. Fatigue design of highly loaded short-glass-fibre reinforced polyamide parts in engine compartments. *International Journal of Fatigue*, 30(7):1279–1288, 2008.

[185] SPATHIS G. ET KONTOU E. Experimental and theoretical description of the plastic behaviour of semicrystalline polymers. *Polymer*, 39:135–142, 1998.

[186] SURESH S. *Fatigue of materials*. Cambridge University Press, New York, 1998.

[187] TANCREZ J.P., PABIOT J., ET RIETSCH F. Damage and fracture mechanisms in thermoplastic-matrix composites in relation to processing and structural parameters. *Composites Science and Technology*, 56(7):725–731, 1996.

[188] TANDON G.P. ET WENG G.J. The effect of aspect ratio of inclusions on the elastic properties of unidirectionally aligned composites. *Polymer composites*, 5(4):327–333, 1984.

[189] THOMASON J. L. ET ALI J. Z. The dimensional stability of glass-fibre reinforced polyamide 66 during hydrolysis conditioning. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 40(5):625–634, 2009.

[190] TROTIGNON J.P. *Etude du comportement en fatigue de matériaux polymères ou composites à matrice organique*. ENSAM, Paris, 1995.

[191] TSAI S.W. ET WU E.M. A general theory of strength for anisotropic materials. *Journal of Composite Materials*, 5(1):58, 1971. ISSN 0021-9983.

[192] TUCKER III C.L. ET LIANG E. Stiffness predictions for unidirectional short-fiber composites : Review and evaluation. *Composites Science and Technology*, 59(5):655–671, 1999.

[193] VAN DOMMELEN J.A.W., PARKS D.M., BOYCE M.C., BREKELMANS W.A.M., ET BAAIJENS F.P.T. Micromechanical modeling of the elasto-viscoplastic behavior of semi-crystalline polymers. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 51(3):519–541, 2003.

[194] VERDU J. Vieillissement physique des Plastiques. *Techniques de l'ingénieur. Plastiques et composites*, 1(A3150):1–17, 1990.

[195] VERDU J. Action de l'eau sur les plastiques. *Techniques de l'ingénieur. Plastiques et composites.*, 1(AM3165):1–8, 2000.

[196] VERDU J. Différents types de vieillissement chimique des plastiques. *Techniques de l'ingénieur. Plastiques et composites*, 1(AM3152):1–14, 2002.

[197] VERDU J. Vieillissement chimique des plastiques : aspects généraux. *Techniques de l'ingénieur. Plastiques et composites*, 1(AM3151):1–14, 2002.

[198] VERDU J. Vieillissement chimique : modélisation cinétique. *Techniques de l'ingénieur. Plastiques et composites*, 1(AM3153):1–6, 2002.

[199] WYZGOSKI M. G ET NOVAK G. E. Predicting fatigue S-N (stress-number of cyclesto fail) bahavior of reinforced plastics using fracture mechanics theory. *Journal of Materials Science*, 40(2):295–308, 2005.

[200] YAKIMETS I., LAI D., ET GUIGON M. Model to predict the viscoelastic response of a semi-crystalline polymer under complex cyclic mechanical loading and unloading conditions. *Mechanics of Time-Dependent Materials*, 11(1):47–60, 2007.

[201] ZAGO A. ET SPRINGER G.S. Constant Amplitude Fatigue of Short Glass and Carbon Fiber Reinforced Thermoplastics. *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, 20(7):564, 2001.

[202] ZAGO A. ET SPRINGER G.S. Fatigue Lives of Short Fiber Reinforced Thermoplastics Parts. *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, 20(7):606, 2001.

[203] ZAGO A., SPRINGER G.S., ET QUARESIMIN M. Cumulative Damage of Short Glass Fiber Reinforced Thermoplastics. *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, 20(7):596, 2001.

[204] ZAIRI F., NAÏT-ABDELAZIZ M., GLOAGUEN J.M., BOUAZIZ A., ET LEFEBVRE J.M. Micromechanical modelling and simulation of chopped random fiber reinforced polymer composites with progressive debonding damage. *International Journal of Solids and Structures*, 45 (20):5220–5236, 2008.

[205] ZAÏRI F., WOZNICA K., ET NAÏT-ABDELAZIZ M. Phenomenological nonlinear modelling of glassy polymers. *Comptes rendus-Mécanique*, 333(4):359–364, 2005.

[206] ZÉBULON . *Z-set 8.4.2 Developer Manual*. Northwest Numerics, Centre des Matériaux de l'ENSMP et ONERA, Evry, 2005.

# Annexe A

# Eprouvettes utilisées

## A.1 Éprouvettes pour la caractérisation du comportement cyclique

Les éprouvettes utilisées pour la caractérisation du comportement cyclique (chapitres 3 et 4) sont conformes à la norme ISO527-2-1A [2]. Leur réponse mécanique en zone utile peut être assimilée à un comportement isotrope transverse, comme l'illustre la figure A.1 sur laquelle on vérifie que $\nu_{12} = 0.34$ – lorsque la réponse apparente est élastique linéaire.

La figure A.2 présente les dimensions de ces éprouvettes ainsi que le résultat de la simulation d'injection réalisée avec MOLDFLOW®. Le tenseur d'orientation en zone utile, moyenné sur l'épaisseur, est estimé valoir :

$$\underline{\underline{a}}^{\psi}_{\text{ISO527-2-1A}} = \begin{bmatrix} 0.916 & -0.004 & 0. \\ -0.004 & 0.064 & 0. \\ 0. & 0. & 0.020 \end{bmatrix}_{(\underline{e}_i)_i}$$

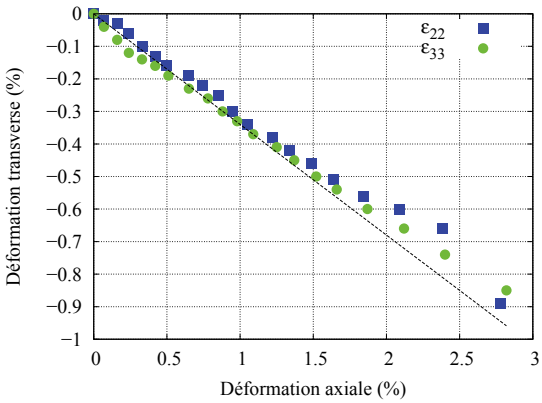



FIGURE A.1 – Essai de traction monotone sur éprouvette ISO527-2-1A (conditions DAM, 23 ˚C) à 25 MPa/s, suivi des déformations tri-dimensionnelles par corrélation d'images.

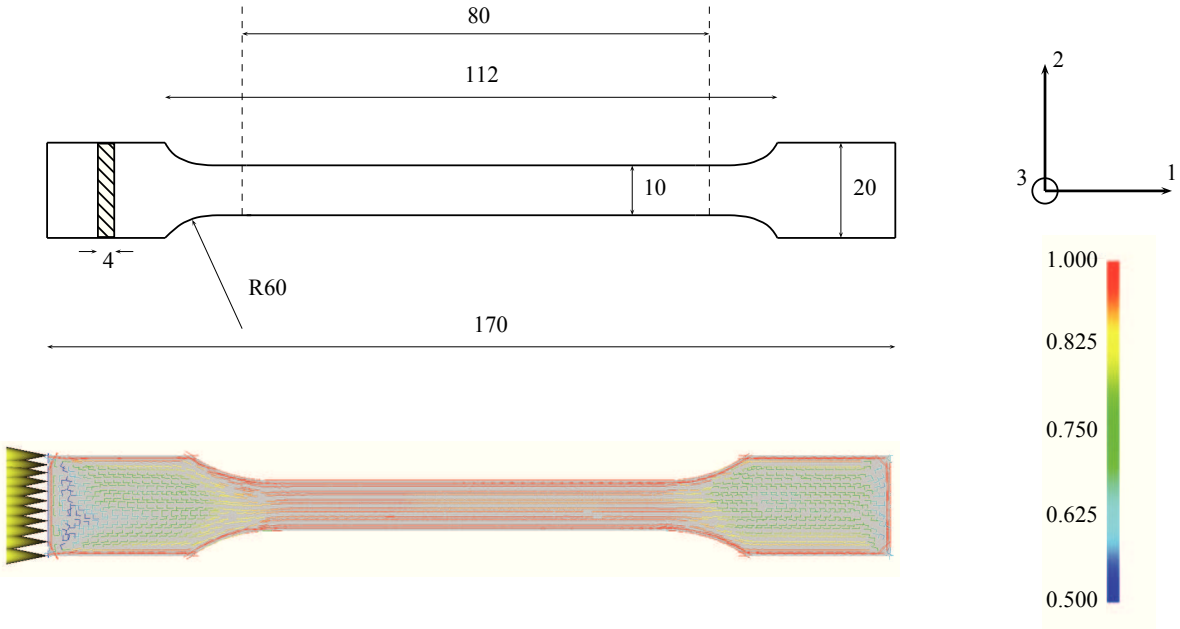



FIGURE A.2 – Dimensions (en mm) et simulation d'injection de l'éprouvette ISO527-2-1A, avec affichage de la moyenne d'orientation sur l'épaisseur $\frac{1}{4}\int_0^4 a_1(z)\,\mathrm{d}z$ selon la direction propre $\underline{u}_1$.

## A.2 Éprouvettes pour l'étude de la réponse anisotrope

Les éprouvettes utilisées au chapitre 5 pour l'étude du lien entre la microstructure locale et la réponse mécanique sont conformes à la norme ISO527-2-5A [2]. Ces éprouvettes sont soit directement moulées par injection (figure A.3), soit découpées dans des plaques (figure A.4). Les tenseurs d'orientation dans la zone utile (moyennés sur l'épaisseur) dans chacune de ces situations sont donnés par :

$$\underline{\underline{a}}^{\psi}_{\text{Inj. Moulée}} = \begin{bmatrix} 0.929 & -0.001 & 0. \\ -0.001 & 0.050 & 0. \\ 0. & 0. & 0.021 \end{bmatrix}_{(\underline{e}_i)}$$

$$\underline{\underline{a}}^{\psi}_{0^\circ \text{ centre}} = \begin{bmatrix} 0.684 & -0.041 & 0. \\ -0.041 & 0.298 & 0. \\ 0. & 0. & 0.018 \end{bmatrix}_{(\underline{e}_i)}$$

$$\underline{\underline{a}}^{\psi}_{0^\circ \text{ bord}} = \begin{bmatrix} 0.899 & -0.102 & 0. \\ -0.102 & 0.084 & 0. \\ 0. & 0. & 0.017 \end{bmatrix}_{(\underline{e}_i)}$$

Dans le cas où l'éprouvette est découpée dans la plaque avec un angle $\alpha$, on applique une rotation d'angle $\alpha$ et d'axe $\underline{e}_3$ au tenseur $\underline{\underline{a}}^{\psi}_{0^\circ \text{ centre}}$.

Ces éprouvettes sont également calculées par éléments finis au chapitre 9. Le maillage utilisé est illustré sur la figure A.5. Les éléments de plus petite taille, utilisés dans le congé de raccordement de rayon 8 mm, ont une hauteur d'environ 0.3 mm.

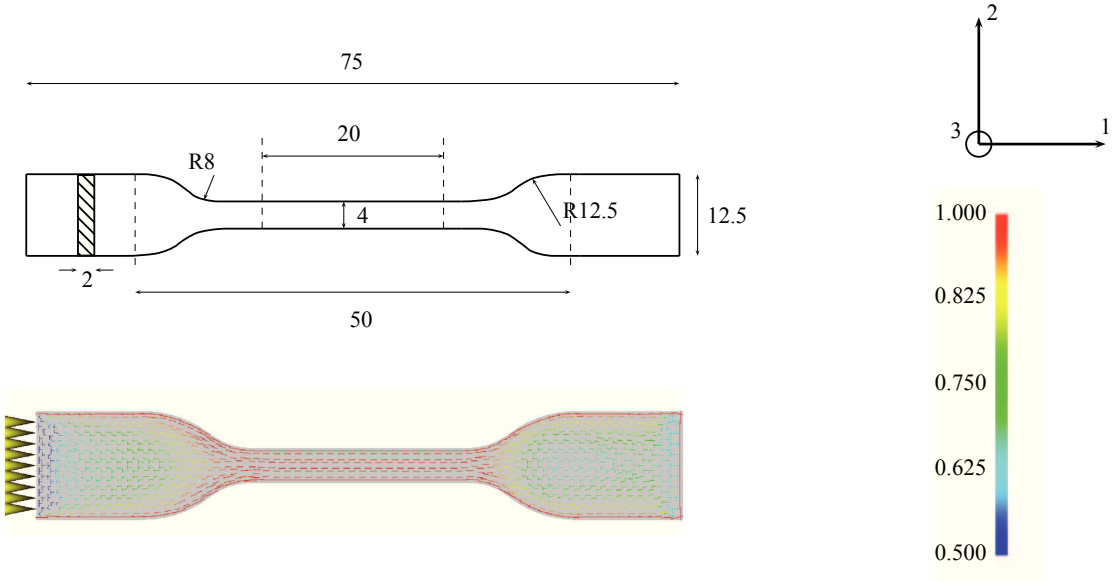



FIGURE A.3 – Dimensions (en mm) et simulation d'injection de l'éprouvette ISO527-2-5A, avec affichage de la moyenne d'orientation sur l'épaisseur $\frac{1}{2}\int_0^2 a_1(z)\,\mathrm{d}z$ selon la direction propre $\underline{u}_1$.

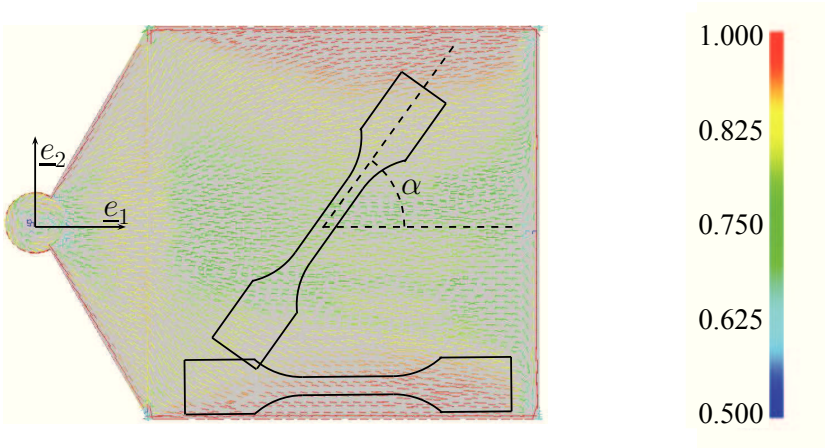



FIGURE A.4 – Simulation d'injection de la plaque réalisée avec MOLDFLOW®, et affichage de l'orientation moyenne sur l'épaisseur $\frac{1}{2}\int_0^2 a_1(z)\,\mathrm{d}z$ selon la direction propre $\underline{u}_1$. Emplacement des éprouvettes prélevées au centre ou au bord des plaques.

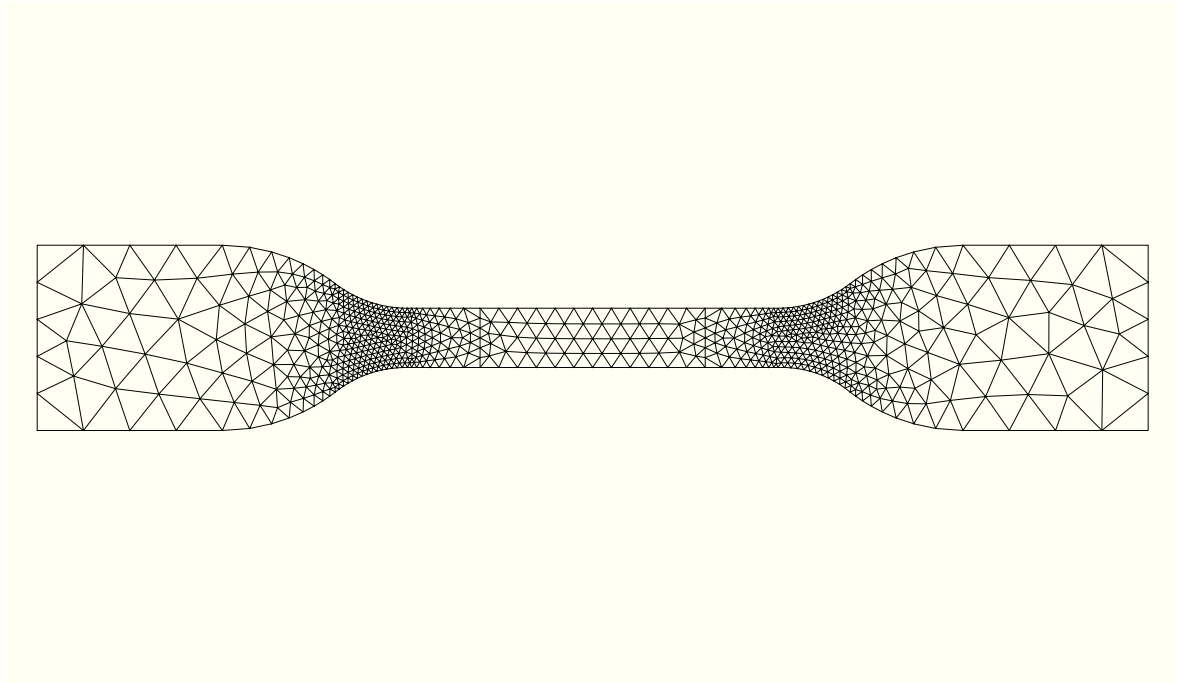


FIGURE A.5 – Maillage réalisé avec ABAQUS® de l'éprouvette ISO527-2-5A : 1465 éléments coques triangulaires à 8 points d'intégration sur l'épaisseur.

## A.3 Éprouvettes de fatigue

Les éprouvettes de fatigue étudiées aux chapitres 6 et 9 sont dénommées éprouvettes « LBF ». Elles présentent trois facteurs de concentration de contrainte différents, comme indiqué sur la figure A.6. Elles sont injectées en nappe, avec un seuil latéral, et la distribution d'orientation résultante est calculée avec MOLDFLOW® (figure A.7).

Les calculs par éléments finis au chapitre ont été réalisés à partir des maillage présentés sur la figure A.8. Comme on le constate sur la figure A.9, les éléments de plus petite taille, utilisés en fond d'entaille de l'éprouvette $K_t = 10$, ont une hauteur de l'ordre de 0.1 mm. Cette dimension est un compromis entre le raffinnement requis de façon à simuler les gradients de grandeurs mécaniques, et entre la dimension du VER en fond d'entaille. En effet, la microstructure locale est caractérisée par le tenseur d'orientation d'ordre 2, qui n'a plus de signification pour des volumes de trop petite taille.

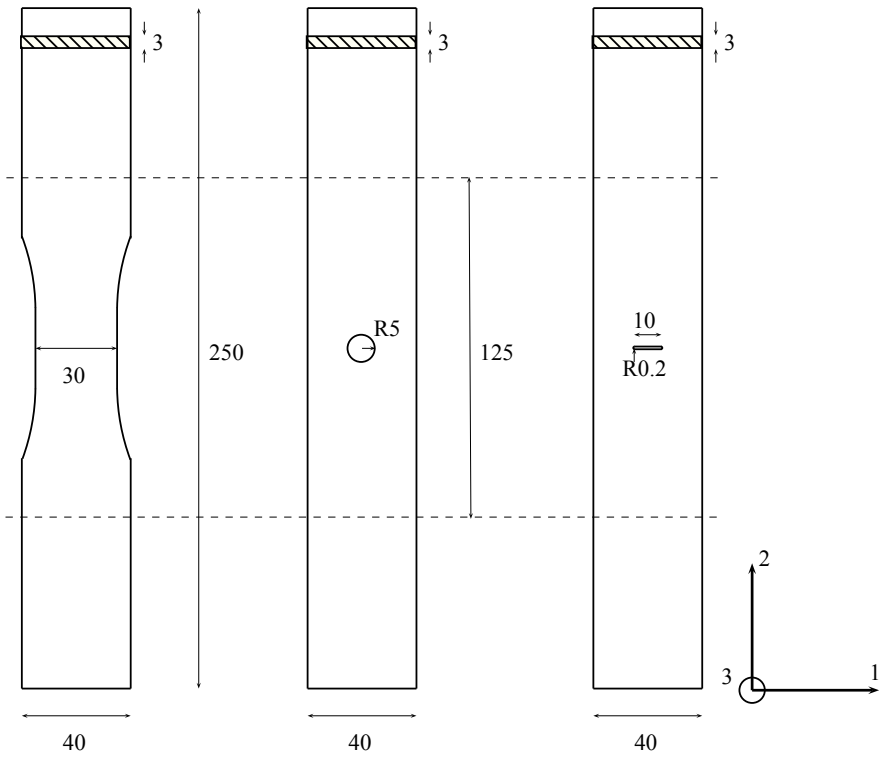
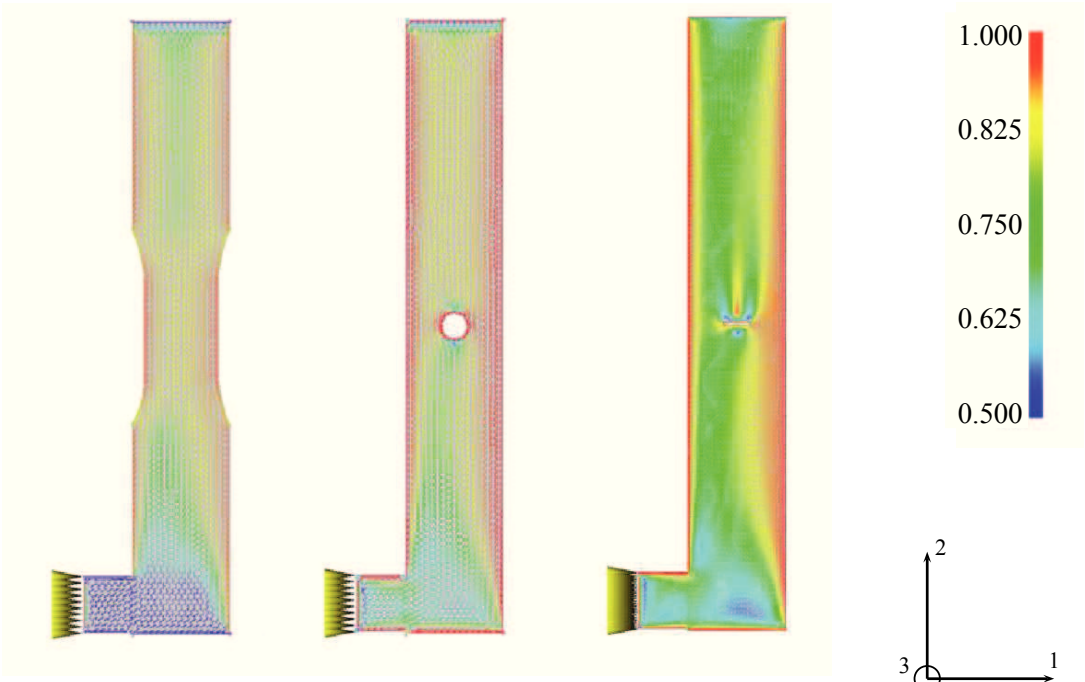
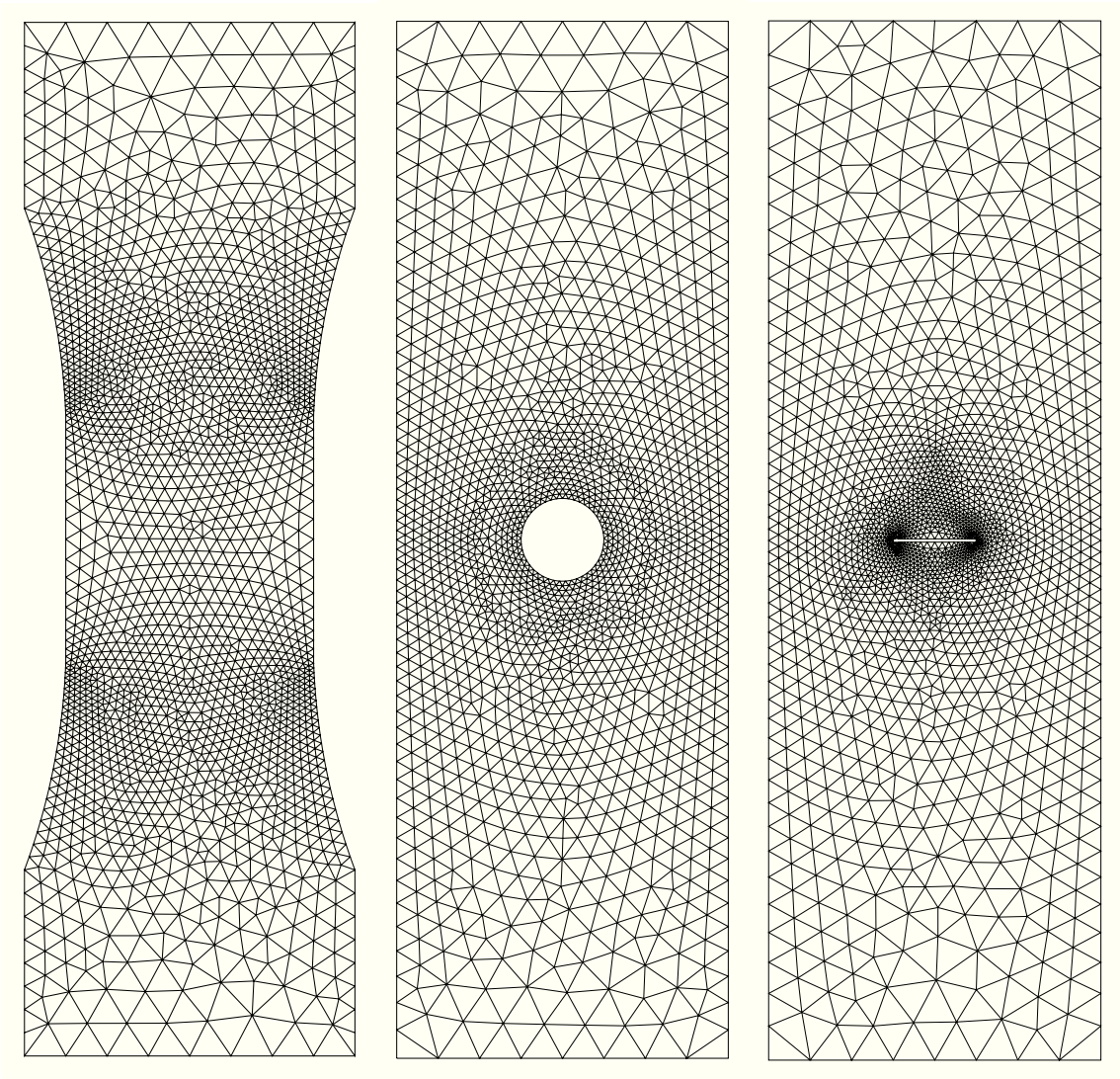



FIGURE A.6 – Dimensions (en mm) des trois éprouvettes LBF, de facteurs d'intensité de contrainte $K_t = 1$, $K_t = 2.5$ et $K_t = 10$.



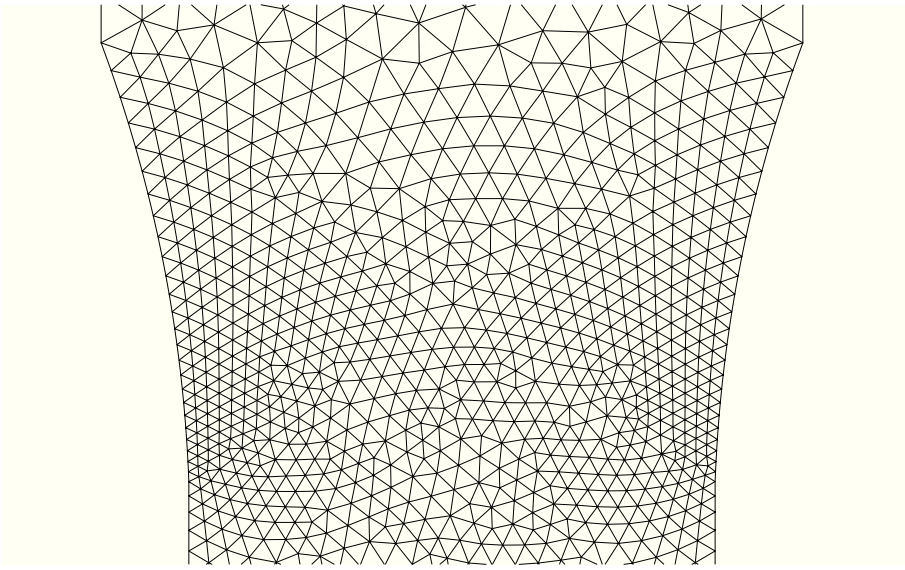

(a) $K_t = 1$ (b) $K_t = 2.5$ (c) $K_t = 10$

FIGURE A.7 – Simulation d'injection (sous MOLDFLOW®) des trois éprouvettes de fatigue, avec affichage de la moyenne d'orientation sur l'épaisseur $\frac{1}{3}\int_0^3 a_1(z)\,\mathrm{d}z$ selon la direction propre $\underline{u}_1$.

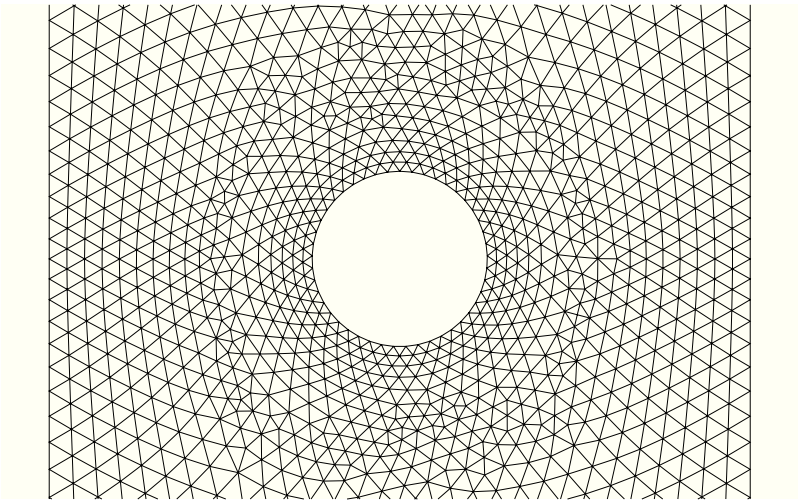


(a) $K_t = 1$ (b) $K_t = 2.5$ (c) $K_t = 10$

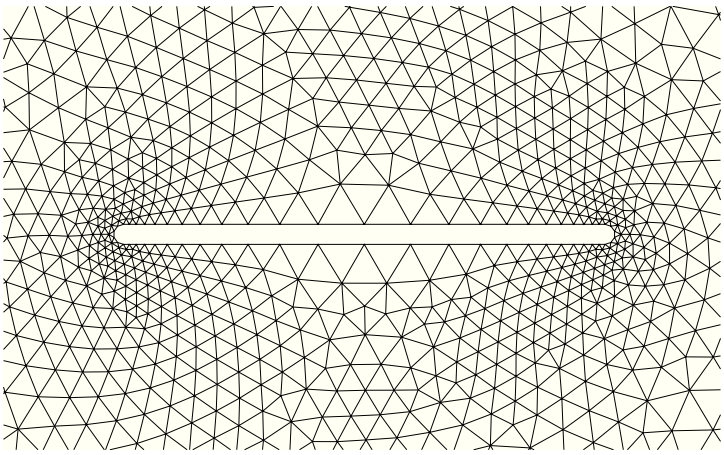
FIGURE A.8 – Maillage réalisés par ABAQUS® des trois éprouvettes de fatigue, avec respectivement 3962, 3361 et 4072 éléments coques triangulaires à 8 points d'intégration sur l'épaisseur.



(a) $K_t = 1$



(b) $K_t = 2.5$



(c) $K_t = 10$

FIGURE A.9 – Zoom sur le maillage dans la zone critique de chacune des trois éprouvettes de fatigue.
CONFIDENTIEL PSA

# Annexe B

# Intégration numérique des équations du comportement

Les équations de la loi de comportement proposée sont présentées au chapitre 3. Nous en avons implémenté la résolution numérique à l'aide d'un schéma d'intégration implicite, dans un premier temps au sein du logiciel ZéBuLon® (ce qui nous a permis d'identifier les paramètres du modèle), puis en langage FORTRAN dans une routine utilisateur UMAT pour Abaqus®, afin de réaliser les calculs par éléments finis.

Le schéma implicite, plus difficile à implémenter qu'un schéma explicite (type Runge-Kutta), est cependant nécessaire à l'analyse numérique d'une structure gouvernée par des équations de comportement fortement non linéaires, ce qui est le cas du modèle proposé.

Nous avons utilisé dans la subroutine UMAT les notations ingénieur de Voigt. Ainsi, une grandeur tensorielle d'ordre 2 $\underline{\underline{u}}$ est stockée dans un vecteur comprenant 6 composantes indépendantes, sous la forme $\{u_{11}, u_{22}, u_{33}, u_{12}, u_{13}, u_{23}\}$ [1], et une grandeur tensorielle d'ordre 4 dans une matrice de taille $6 \times 6$.

## B.1 Schéma implicite et méthode de Newton locale

Le principe d'un schéma d'intégration est de proposer une méthode pour passer de l'état mécanique à l'instant courant $t$ – défini par l'ensemble des variables d'intégration $\{v_i(t)\}_i$ – à l'instant suivant $t + \Delta t$ à l'aide des équations d'évolutions.

Le schéma implicite est une $\theta$-méthode avec point milieu généralisé. Il consiste à évaluer le taux de variation des variables $v_i$ à l'instant $t + \theta\Delta t$ selon :

$$\dot{v}_i(t + \theta\Delta t) = \frac{v_i(t + \Delta t) - v_i(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta v_i}{\Delta t} \tag{B.1}$$

Les quantités $\dot{v}_i$ sont estimées à partir des lois d'évolution avec les grandeurs physiques exprimées à l'instant $t + \theta\Delta t$. Ce schéma est une généralisation du schéma explicite (cas $\theta = 0$) et de la méthode

1. Dans le cas des grandeurs mécaniques qui nous concernent, les tenseurs d'ordre 2 sont toujours symétriques, donc seules 6 composantes sont indépendantes. On stocke de la même façon les contraintes et les déformations : le produit doublement contracté n'est donc pas équivalent au produit scalaire, puisqu'il faut ajouter un facteur 2 sur les composantes $ij$ où $i \neq j$.

implicite d'Euler (cas $\theta = 1$). On notera que dans notre cas, le choix $\theta = 1$ est généralement satisfaisant ; cette valeur est d'ailleurs figée dans la UMAT.

Le problème numérique en mécanique des structures consiste à calculer l'incrément de contrainte $\Delta\underline{\underline{\sigma}}$ conséquent à un incrément de déformation totale (variable de contrôle) $\Delta\underline{\underline{\varepsilon}}$ imposé sur une durée $\Delta t$. Dans le cas où le chargement est défini en contrainte [2], on recherche de façon itérative quel est l'incrément de déformation permettant de respecter la consigne : $?\Delta\underline{\underline{\varepsilon}} \mid \Delta\underline{\underline{\sigma}} = \Delta\underline{\underline{\sigma}}^{\text{imp}}$.

**Remarque : variables d'état ou variables d'intégration ?**

L'ensemble des variables d'état représente un choix possible pour définir les variables d'intégration. Cependant, il est généralement plus pratique de travailler avec le multiplicateur viscoplastique $p$ et la déformation élastique $\underline{\underline{\varepsilon}}_e$ à la place de la déformation viscoplastique $\underline{\underline{\varepsilon}}_{vp}$, qui est pourtant la variable d'état naturelle. Dans cette étude, nous avons choisi de travailler avec $\{\underline{\underline{\varepsilon}}_e, \underline{\underline{\varepsilon}}_{v1}, \underline{\underline{\varepsilon}}_{v2}, \underline{\underline{\alpha}}, p, \beta\}$.

**Convention**

Dans la suite de ces travaux, une grandeur $u_i$ est toujours sous-entendue, sauf mention explicite du contraire, comme étant exprimée à l'instant $t + \theta\Delta t$. De même, tous les paramètres matériaux sont exprimés en $t + \theta\Delta t$, c'est-à-dire à la température $T(t + \theta\Delta t)$. $\Delta u_i$ représente l'incrément de la grandeur entre les instants $t$ et $t + \Delta t$. On utilise dans la suite l'approximation au premier ordre $u_i \equiv u_i(t + \theta\Delta t) = u_i(t) + \theta\Delta u_i$, où $u_i(t)$ est supposé connu.

### B.1.1 Vecteur résidu

La méthode de Newton permet de résoudre numériquement le problème posé grâce à l'annulation d'un résidu $\{R\}$ défini par :

$$\{R\} = \{\Delta v_i\}_i - \Delta t\,\{\dot{v}_i(t + \theta\Delta t)\}_i \tag{B.2}$$

Les inconnues du problème sont les incréments des variables d'intégration entre $t$ et $t + \Delta t$, et l'équation B.2 est bien implicite puisque les inconnues interviennent également dans les expressions des lois d'évolution (non linéaires). Le vecteur résidu est défini selon les 6 variables d'intégration par :

$$\underline{\underline{R}}_{\varepsilon_e} = \Delta\underline{\underline{\varepsilon}}_e - \left(\Delta\underline{\underline{\varepsilon}} - \Delta\underline{\underline{\varepsilon}}_{v1} - \Delta\underline{\underline{\varepsilon}}_{v2} - \Delta p\,\underline{\underline{n}}_{vp}\right) \tag{B.3}$$

$$R_p = \Delta p - A\Delta t\left[\sinh\left(\frac{\mathcal{J}_{vp}}{H}\right)\right]^m \tag{B.4}$$

$$\underline{\underline{R}}_{\varepsilon_{v1}} = \Delta\underline{\underline{\varepsilon}}_{v1} - \frac{3\Delta t}{2\eta_1}\underline{\underline{\text{dev}}}\left(\underline{\underline{\mathcal{A}}}_{v1}\right) \tag{B.5}$$

$$\underline{\underline{R}}_{\varepsilon_{v2}} = \Delta\underline{\underline{\varepsilon}}_{v2} - \frac{3\Delta t}{2\eta_2}\underline{\underline{\text{dev}}}\left(\underline{\underline{\mathcal{A}}}_{v2}\right) \tag{B.6}$$

$$\underline{\underline{R}}_{\alpha} = \Delta\underline{\underline{\alpha}} - \left(-\Delta p\left(\underline{\underline{n}}_{vp} + \frac{2\gamma}{3}\mathbb{P} : \underline{\underline{\alpha}}\right)\right) \tag{B.7}$$

$$R_\beta = \Delta\beta - \left(\Delta\underline{\underline{\varepsilon}}_{vp} : \underline{\underline{\mathcal{A}}}_{vp} + \Delta\underline{\underline{\alpha}} : \underline{\underline{X}}\right) = \Delta\beta - \Delta p\left(\mathcal{J}_{vp} + \frac{\gamma}{C}\underline{\underline{X}} : \mathbb{P} : \underline{\underline{X}}\right) \tag{B.8}$$

Numériquement, on préfère travailler avec $\frac{\beta}{H}$ qui est une grandeur sans dimension, analogue à une déformation et donc comparable aux autres quantités pour la construction du vecteur résidu global.

2. Le cas d'un chargement mixte répond à la même logique, mais en distinguant les composantes en contrainte ou en déformation imposée.

### B.1.2 Matrice jacobienne

La matrice jacobienne est une donnée nécessaire à la convergence de la méthode de Newton. En effet, à chaque itération de la méthode de Newton, on corrige l'incrément de l'itération $k$, noté $\{\Delta v\}^k$, par la quantité $\{\delta\Delta v\}$. Un développement de Taylor au premier ordre en la correction s'écrit (on omet les indices $i$ pour alléger l'écriture) :

$$\{R\}\left(\{\Delta v\}^k + \{\delta\Delta v\}\right) = \{R\}\left(\{\Delta v\}^k\right) + [J]\cdot\{\delta\Delta v\} \tag{B.9}$$

La méthode consiste à rechercher la correction qui permet d'annuler au premier ordre le résidu à l'itération $k+1$, d'où :

$$\{\delta\Delta v\} = -[J]^{-1}\cdot\{R\}^k, \quad \text{en notant } \{R\}^k = \{R\}\left(\{\Delta v\}^k\right) \tag{B.10}$$

La matrice jacobienne $[J]$ est définie par composantes selon :

$$[J]_{ij} = \frac{\partial R_i}{\partial \Delta v_j} \tag{B.11}$$

Elle est donc de taille $26\times 26$ pour notre loi de comportement. Détaillons maintenant par blocs chacun de ces termes. Pour cela, on définit tout d'abord les grandeurs suivantes :

$$\begin{aligned}
\mathbb{G}^e &= \frac{\partial \mathbb{C}^e}{\partial \beta} = g'(\beta)\,\mathbb{C}^e(0) = -\frac{a}{b}\exp\left(\frac{-\beta}{b}\right)\mathbb{C}^e(0)\\
\mathbb{N} &= \frac{\partial \underline{\underline{n}}_{vp}}{\partial \underline{\underline{\mathcal{A}}}_{vp}} = \frac{1}{\mathcal{J}_{vp}}\left(\mathbb{P} - \underline{\underline{n}}_{vp}\otimes\underline{\underline{n}}_{vp}\right)\\
\frac{\partial \Phi}{\partial \mathcal{J}_{vp}} &= A\frac{m}{H}\cosh\left(\frac{\mathcal{J}_{vp}}{H}\right)\left[\sinh\left(\frac{\mathcal{J}_{vp}}{H}\right)\right]^{m-1}
\end{aligned}$$

où $\Phi(\mathcal{J}_{vp}) = A\left[\sinh\left(\frac{\mathcal{J}_{vp}}{H}\right)\right]^m$ représente la fonction d'écoulement viscoplastique.

Dans notre cas, on écrira la matrice jacobienne analytiquement, selon les équations suivantes (les termes non exprimés sont nuls) :

$$\frac{\partial \underline{\underline{R}}_{\varepsilon_e}}{\partial \Delta\underline{\underline{\varepsilon}}_e} = \mathbb{I} + \theta\Delta p\,\mathbb{N} : \mathbb{C}^e \tag{B.12}$$

$$\frac{\partial \underline{\underline{R}}_{\varepsilon_e}}{\partial \Delta\underline{\underline{\varepsilon}}_{v1}} = \mathbb{I} \tag{B.13}$$

$$\frac{\partial \underline{\underline{R}}_{\varepsilon_e}}{\partial \Delta\underline{\underline{\varepsilon}}_{v2}} = \mathbb{I} \tag{B.14}$$

$$\frac{\partial \underline{\underline{R}}_{\varepsilon_e}}{\partial \Delta p} = \underline{\underline{n}}_{vp} \tag{B.15}$$

$$\frac{\partial \underline{\underline{R}}_{\varepsilon_e}}{\partial \Delta\underline{\underline{\alpha}}} = \frac{2C}{3}\theta\Delta p\,\mathbb{N} \tag{B.16}$$

$$\frac{\partial \underline{\underline{R}}_{\varepsilon_e}}{\partial \Delta\beta} = \theta\Delta p\,(\mathbb{N} : \mathbb{G}^e) : \underline{\underline{\varepsilon}}_e \tag{B.17}$$

Les termes issus du résidu sur les composantes viscoélastiques linéaires long terme s'écrivent :

$$\frac{\partial \underline{\underline{R}}_{\varepsilon_{v1}}}{\partial \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_e} = -\frac{3\theta\Delta t}{2\eta_1}\mathbb{K} : \mathbb{C}^e \tag{B.18}$$

$$\frac{\partial \underline{\underline{R}}_{\varepsilon_{v1}}}{\partial \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_{v1}} = \mathbb{I} + \frac{3\theta\Delta t}{2\eta_1}\mathbb{K} : \mathbb{C}^{v_1} \tag{B.19}$$

$$\frac{\partial R_{\varepsilon_{v1}}}{\partial \Delta \beta} = -\frac{3\theta\Delta p}{2\eta_1}\mathbb{K} : \mathbb{G}^e : \underline{\underline{\varepsilon}}_e \tag{B.20}$$

et les écritures pour la viscoélasticité linéaire court terme sont similaires :

$$\frac{\partial \underline{\underline{R}}_{\varepsilon_{v2}}}{\partial \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_e} = -\frac{3\theta\Delta t}{2\eta_2}\mathbb{K} : \mathbb{C}^e \tag{B.21}$$

$$\frac{\partial \underline{\underline{R}}_{\varepsilon_{v2}}}{\partial \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_{v2}} = \mathbb{I} + \frac{3\theta\Delta t}{2\eta_2}\mathbb{K} : \mathbb{C}^{v_2} \tag{B.22}$$

$$\frac{\partial R_{\varepsilon_{v2}}}{\partial \Delta \beta} = -\frac{3\theta\Delta p}{3\eta_2}\mathbb{K} : \mathbb{G}^e : \underline{\underline{\varepsilon}}_e \tag{B.23}$$

$$\tag{B.24}$$

Dans le cas où l'écoulement viscoplastique est activé ($\mathcal{J}_{vp} > 0$), on définit :

$$\frac{\partial R_p}{\partial \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_e} = -\theta\Delta t \frac{\partial \Phi}{\partial \mathcal{J}_{vp}}\mathbb{C}^e : \underline{\underline{n}}_{vp} \tag{B.25}$$

$$\frac{\partial R_p}{\partial \Delta p} = 1 \tag{B.26}$$

$$\frac{\partial R_p}{\partial \Delta \underline{\underline{\alpha}}} = -\frac{2C}{3}\theta\Delta t \frac{\partial \Phi}{\partial \mathcal{J}_{vp}}\underline{\underline{n}}_{vp} \tag{B.27}$$

$$\frac{\partial R_p}{\partial \Delta \beta} = -\theta\Delta t \frac{\partial \Phi}{\partial \mathcal{J}_{vp}}\left(\underline{\underline{\varepsilon}}_e : \mathbb{G}^e : \underline{\underline{n}}_{vp}\right) \tag{B.28}$$

et pour la variable d'écrouissage :

$$\frac{\partial \underline{\underline{R}}_\alpha}{\partial \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_e} = \theta\Delta p\, \mathbb{N} : \mathbb{C}^e \tag{B.29}$$

$$\frac{\partial \underline{\underline{R}}_\alpha}{\partial \Delta p} = \underline{\underline{n}}_{vp} + \frac{2\gamma}{3}\mathbb{P} : \underline{\underline{\alpha}} \tag{B.30}$$

$$\frac{\partial \underline{\underline{R}}_\alpha}{\partial \Delta \underline{\underline{\alpha}}} = \mathbb{I} + \theta\Delta p\left(\frac{2\gamma}{3}\mathbb{P} + \frac{2C}{3}\mathbb{N}\right) \tag{B.31}$$

$$\frac{\partial \underline{\underline{R}}_\alpha}{\partial \Delta \beta} = \theta\Delta p\left(\mathbb{N} : \mathbb{G}^e\right) : \underline{\underline{\varepsilon}}_e \tag{B.32}$$

Enfin, les équations concernant la variable d'adoucissement cyclique s'écrivent :

$$\frac{\partial R_\beta}{\partial \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_e} = -\theta \Delta p \, \mathbb{C}^e : \underline{\underline{n}}_{vp} \tag{B.33}$$

$$\frac{\partial R_\beta}{\partial \Delta p} = -\mathcal{J}_{vp} - \frac{\gamma}{2} \underline{\underline{X}} : \mathbb{P} : \underline{\underline{X}} \tag{B.34}$$

$$\frac{\partial R_\beta}{\partial \Delta \underline{\underline{\alpha}}} = \theta \Delta p \left( \frac{4\gamma}{3} \mathbb{P} : \underline{\underline{X}} - \frac{2C}{3} \underline{\underline{n}}_{vp} \right) \tag{B.35}$$

$$\frac{\partial R_\beta}{\partial \Delta \beta} = 1 - \Delta p \left( \underline{\underline{n}}_{vp} : \mathbb{G}^e : \underline{\underline{\varepsilon}}_e \right) \tag{B.36}$$

Notons que tous les termes qui font intervenir des incréments $\Delta p$ ou $\Delta \underline{\underline{\alpha}}$ sont nuls quand $\mathcal{J}_{vp} = 0$.

### B.1.3 Convergence

La méthode de Newton a convergé quand une itération $k$ permet d'obtenir un résidu $\{R\}^k$ dont la norme est inférieure à une tolérance $\epsilon$. Nous avons utilisé dans la UMAT une norme quadratique, et avons fixé la valeur $\epsilon$ à 1e-12.

## B.2 Résultats issus de la méthode de Newton

### B.2.1 Incrément de contrainte

La détermination de l'incrément de contrainte $\Delta \underline{\underline{\sigma}}$ s'appuie sur le calcul de l'incrément de déformation élastique $\Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_e$ lorsque la méthode de Newton a convergé. Il faut tenir compte de la variation du tenseur des modules élastiques $\mathbb{C}^e$, qui dépend à la fois de l'activation de l'adoucissement cyclique ($\Delta\beta > 0$) et d'une éventuelle variation de température [3]. Le schéma d'intégration implicite permet d'écrire (au premier ordre) :

$$\Delta \underline{\underline{\sigma}} = \dot{\underline{\underline{\sigma}}}(t + \theta \Delta t) \Delta t \tag{B.37}$$

que l'on développe selon :

$$\Delta \underline{\underline{\sigma}} = \left( \dot{\mathbb{C}^e : \underline{\underline{\varepsilon}}_e} \right) \Delta t \tag{B.38}$$

$$= \left( \mathbb{C}^e : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}_e + \dot{\mathbb{C}}^e : \underline{\underline{\varepsilon}}_e \right) \Delta t \tag{B.39}$$

$$= \mathbb{C}^e : \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_e + \Delta \mathbb{C}^e : \underline{\underline{\varepsilon}}_e \tag{B.40}$$

On rappelle que les quantités sont exprimées par défaut à l'instant $t + \theta \Delta t$, ce qui permet de réformuler l'expression de l'incrément de contrainte selon :

$$\Delta \underline{\underline{\sigma}} = (\mathbb{C}^e(t) + 2\theta \, \Delta \mathbb{C}^e) : \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_e + \Delta \mathbb{C}^e : \underline{\underline{\varepsilon}}_e(t) = (\mathbb{C}^e + \theta \, \Delta \mathbb{C}^e) : \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_e + \Delta \mathbb{C}^e : \underline{\underline{\varepsilon}}_e(t) \tag{B.41}$$

3. C'est-à-dire $\Delta \mathbb{C}^e = \mathbb{G}^e : \Delta\beta + \dfrac{\partial \mathbb{C}^e}{\partial T} \Delta T$.

### B.2.2 Matrice tangente

Il est utile de définir la matrice tangente cohérente liée au schéma d'intégration. La donnée de cette matrice n'est pas *stricto sensu* nécessaire à la convergence de la méthode de Newton globale sur la structure, mais s'avère souvent indispensable dans le cas d'un calcul sur structure pour éviter des incréments $\Delta t$ trop faibles. Cette matrice est définie par :

$$[L^c] = \frac{\partial \Delta \underline{\underline{\sigma}}}{\partial \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}} \tag{B.42}$$

Il faut noter qu'elle est dans le cas général différente de la matrice tangente analytique obtenue à partir de la dérivation des équations d'évolution. Avec notre schéma d'intégration, on s'inspire de [27] pour montrer que :

$$[L^c] = (\mathbb{C}^e + \theta \Delta \mathbb{C}^e) : [J^*_{e-e}] + \left(2\theta \mathbb{G}^e : \underline{\underline{\varepsilon}}_e\right) \otimes \left\{J^*_{\beta-e}\right\} \tag{B.43}$$

La matrice $[J^*_{e-e}]$ est définie à partir de l'inverse de la matrice jacobienne $[J]^{-1}$ : c'est le bloc correspondant aux indices liés à la déformation élastique $\underline{\underline{\varepsilon}}_e$ (sur les lignes et les colonnes). Ainsi $[J^*_{e-e}]$ est bien une matrice de taille $6 \times 6$. $\left\{J^*_{\beta-e}\right\}$ est un vecteur ligne (de taille 6) correspondant au bloc défini par l'indice de $\beta$ sur les lignes et par les indices de $\underline{\underline{\varepsilon}}_e$ sur les colonnes de $[J]^{-1}$.

Les notations de Voigt permettent d'identifier les tenseurs d'ordre 4 avec les matrices de taille $6 \times 6$, et les tenseurs d'ordre 2 avec les vecteurs de taille 6. Le produit tensoriel s'apparente au produit d'un vecteur colonne par un vecteur ligne. Nous constatons ainsi que $[L^c]$ est bien une matrice de taille $6 \times 6$, c'est-à-dire la représentation d'un tenseur d'ordre 4.

#### Démonstration de l'équation B.43

Plutôt que de résoudre $\{R\} = 0$ dans la méthode de Newton, considérons un problème équivalent qui s'écrit :

$$\{\tilde{R}\} \equiv \left\{ \begin{array}{c} \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_e + \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_{v1} + \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_{v2} + \Delta p \, \underline{\underline{n}}_{vp} \\ \Delta p - \Delta t \Phi \\ \vdots \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \Delta \underline{\underline{\varepsilon}} \\ 0 \\ \vdots \end{array} \right\} \tag{B.44}$$

Le résidu $\{\tilde{R}\}$ possède exactement la même matrice jacobienne que $\{R\}$ puisque $\underline{\underline{\varepsilon}}$ ne fait pas partie des variables à intégrer. Supposons que l'on fasse varier $\Delta \underline{\underline{\varepsilon}}$ de façon infinitésimale, l'équation B.9 s'écrit dans ce cas :

$$\underbrace{\{\tilde{R}\}\left(\{\Delta v\}^k + \{\delta \Delta v\}\right)}_{\left\{ \begin{array}{c} \Delta \underline{\underline{\varepsilon}} + \delta \Delta \underline{\underline{\varepsilon}} \\ 0 \\ \vdots \end{array} \right\}} = \underbrace{\{\tilde{R}\}\left(\{\Delta v\}^k\right)}_{\left\{ \begin{array}{c} \Delta \underline{\underline{\varepsilon}} \\ 0 \\ \vdots \end{array} \right\}} + [J] \cdot \{\delta \Delta v\} \tag{B.45}$$

L'inversion de cette relation permet alors d'écrire :

$$\{\delta \Delta v\} \equiv \left\{ \begin{array}{c} \delta \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_e \\ \delta \Delta p \\ \vdots \\ \delta \Delta \beta \end{array} \right\} = [J]^{-1} \cdot \left\{ \begin{array}{c} \delta \Delta \underline{\underline{\varepsilon}} \\ 0 \\ \vdots \\ \delta \Delta \beta \end{array} \right\} \tag{B.46}$$

On isole alors la colonne de l'inverse de la jacobienne qui correspond à la déformation élastique. On peut par exemple noter :

$$[J]^{-1} = \begin{bmatrix} J^*_{e-e} & J^*_{e-p} & \cdots & J^*_{e-\beta} \\ J^*_{p-e} & J^*_{p-p} & \cdots & J^*_{p-\beta} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ J^*_{\beta-e} & J^*_{\beta-p} & \cdots & J^*_{\beta-\beta} \end{bmatrix} \tag{B.47}$$

Nous montrons ainsi d'une part que :

$$\delta\Delta\underline{\underline{\varepsilon}}_e = [J^*_{e-e}] \cdot \delta\Delta\underline{\underline{\varepsilon}} \tag{B.48}$$

et d'autre part que :

$$\delta\Delta\beta = \left[J^*_{\beta-e}\right] \cdot \delta\Delta\underline{\underline{\varepsilon}} \tag{B.49}$$

L'équation B.41 implique que :

$$\delta\Delta\underline{\underline{\sigma}} = (\mathbb{C}^e(t) + 2\theta\Delta\mathbb{C}^e) : \delta\Delta\underline{\underline{\varepsilon}}_e + \left(2\theta\mathbb{G}^e : \underline{\underline{\varepsilon}}_e\right)\delta\Delta\beta \tag{B.50}$$

Nous reformulons cette expression selon

$$\delta\Delta\underline{\underline{\sigma}} = \left((\mathbb{C}^e(t) + 2\theta\Delta\mathbb{C}^e) : [J^*_{e-e}] + \left(2\theta\mathbb{G}^e : \underline{\underline{\varepsilon}}_e\right) \otimes \left[J^*_{\beta-e}\right]\right) : \delta\Delta\underline{\underline{\varepsilon}} \tag{B.51}$$

ce qui démontre le résultat souhaité. Précisons pour conclure que le second terme de l'équation B.43 est généralement très faible devant le premier.

## B.3 Cas des éléments coques en contraintes planes

Certains calculs de structure font intervenir des éléments coques. La description de la cinématique de ces éléments est différente de celle des éléments volumiques, et les grandeurs mécaniques présentent alors une formulation simplifiée.

Nous nous plaçons dans le cas des contraintes planes, qui correspond au cas où les éléments coques, de normale $\underline{e}_3$, vérifient $\sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0$. Cette formulation a été mise en application aux chapitres 6 et 9 pour analyser les éprouvettes de fatigue sollicitées en traction ; elle peut également s'avérer pratique pour un calcul précis des grandeurs mécaniques en surface d'un maillage volumique.

On pose $\underline{\underline{\varepsilon}}^{in} = \underline{\underline{\varepsilon}}_{v1} + \underline{\underline{\varepsilon}}_{v2} + \underline{\underline{\varepsilon}}_{vp}$, et on note $\underline{\underline{\varepsilon}}^{el} = \underline{\underline{\varepsilon}}_e$ pour des raisons de facilité de lecture avec les indices. La condition de contraintes planes implique une variation nulle des composantes hors-plan du tenseur des contraintes, ce que l'on développe sous la forme :

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = [A] \cdot \begin{Bmatrix} \Delta\varepsilon_{11} \\ \Delta\varepsilon_{22} \\ \Delta\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} + [B] \cdot \begin{Bmatrix} \Delta\varepsilon_{33} \\ \Delta\varepsilon_{13} \\ \Delta\varepsilon_{23} \end{Bmatrix} - [C] \cdot \begin{Bmatrix} \Delta\varepsilon^{in}_{11} \\ \Delta\varepsilon^{in}_{22} \\ \Delta\varepsilon^{in}_{33} \\ \Delta\varepsilon^{in}_{12} \\ \Delta\varepsilon^{in}_{13} \\ \Delta\varepsilon^{in}_{23} \end{Bmatrix} + [D] \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon^{el}_{11} \\ \varepsilon^{el}_{22} \\ \varepsilon^{el}_{33} \\ \varepsilon^{el}_{12} \\ \varepsilon^{el}_{13} \\ \varepsilon^{el}_{23} \end{Bmatrix} \tag{B.52}$$

On a introduit les notations suivantes pour alléger les écritures :

$$
\begin{aligned}
[A] &= \begin{bmatrix} C^e_{3311} + 2\Delta C^e_{3311} & C^e_{3322} + 2\Delta C^e_{3322} & 2C^e_{3312} + 4\Delta C^e_{3312} \\ C^e_{1311} + 2\Delta C^e_{1311} & C^e_{1322} + 2\Delta C^e_{1322} & 2C^e_{1312} + 4\Delta C^e_{1312} \\ C^e_{2311} + 2\Delta C^e_{2311} & C^e_{2322} + 2\Delta C^e_{2322} & 2C^e_{2312} + 4\Delta C^e_{2312} \end{bmatrix} \quad \text{(taille } 3 \times 3\text{)} \\
[B] &= \begin{bmatrix} C^e_{3333} + 2\Delta C^e_{3333} & 2C^e_{3313} + 4\Delta C^e_{3313} & 2C^e_{3323} + 4\Delta C^e_{3323} \\ C^e_{1333} + 2\Delta C^e_{1333} & 2C^e_{1313} + 4\Delta C^e_{1313} & 2C^e_{1323} + 4\Delta C^e_{1323} \\ C^e_{2333} + 2\Delta C^e_{2333} & 2C^e_{2313} + 4\Delta C^e_{2313} & 2C^e_{2323} + 4\Delta C^e_{2323} \end{bmatrix} \quad \text{(taille } 3 \times 3\text{)} \\
[C] &= \begin{bmatrix} C^e_{3311} + 2\Delta C^e_{3311} & C^e_{3322} + 2\Delta C^e_{3322} & C^e_{3333} + 2\Delta C^e_{3333} + \dots & 2C^e_{3312} + 4\Delta C^e_{3312} & 2C^e_{3313} + 4\Delta C^e_{3313} & 2C^e_{3323} + 4\Delta C^e_{3323} \\ C^e_{1311} + 2\Delta C^e_{1311} & C^e_{1322} + 2\Delta C^e_{1322} & C^e_{1333} + 2\Delta C^e_{1333} + \dots & 2C^e_{1312} + 4\Delta C^e_{1312} & 2C^e_{1313} + 4\Delta C^e_{1313} & 2C^e_{1323} + 4\Delta C^e_{1323} \\ C^e_{2311} + 2\Delta C^e_{2311} & C^e_{2322} + 2\Delta C^e_{2322} & C^e_{2313} + 2\Delta C^e_{2333} + \dots & 2C^e_{2312} + 4\Delta C^e_{2312} & 2C^e_{2322} + 4\Delta C^e_{2313} & 2C^e_{2323} + 4\Delta C^e_{2323} \end{bmatrix} \quad \text{(taille } 3 \times 6\text{)} \\
[D] &= \begin{bmatrix} \Delta C^e_{3311} & \Delta C^e_{3322} & \Delta C^e_{3333} & 2\Delta C^e_{3312} & 2\Delta C^e_{3313} & 2\Delta C^e_{3323} \\ \Delta C^e_{1311} & \Delta C^e_{1322} & \Delta C^e_{1333} & 2\Delta C^e_{1312} & 2\Delta C^e_{1313} & 2\Delta C^e_{1323} \\ \Delta C^e_{2311} & \Delta C^e_{2322} & \Delta C^e_{2333} & 2\Delta C^e_{2312} & 2\Delta C^e_{2313} & 2\Delta C^e_{2323} \end{bmatrix} \quad \text{(taille } 3 \times 6\text{)}
\end{aligned}
$$

On remarque qu'à l'instant $t + \Delta t$, les inconnues sont les quantités incrémentales ($\Delta x$) à l'exception du vecteur $\left\{\Delta\varepsilon^{imp}\right\} = {}^t\{\Delta\varepsilon_{11}\ \Delta\varepsilon_{22}\ \Delta\varepsilon_{12}\}$ qui est une entrée du problème. Par contre, $\left\{\Delta\varepsilon^{hp}\right\} = {}^t\{\Delta\varepsilon_{13}\ \Delta\varepsilon_{23}\ \Delta\varepsilon_{33}\}$ représente 3 inconnues supplémentaires à déterminer par rapport au problème « volumique ».

**Remarque**

Le système de 3 équations B.52 donnée en toute généralité pour un comportement élastique anisotrope se résume à une seule équation portant sur $\Delta\varepsilon_{33}$ dans le cas isotrope.

### B.3.1 Formulation du résidu lié aux déformation hors-plan

Le vecteur résidu complémentaire (de taille 3) se définit alors simplement par :

$$R_{\varepsilon_{hp}} = \frac{1}{E^0_e}\left([B]\cdot\left\{\Delta\varepsilon^{hp}\right\} + [A]\cdot\left\{\Delta\varepsilon^{imp}\right\} - [C]\cdot\left\{\Delta\underline{\underline{\varepsilon}}^{in}\right\} + [D]\cdot\left\{\underline{\underline{\varepsilon}}^{el}\right\}\right) \tag{B.53}$$

Remarquons que le résidu est normalisé par le module de Young $E^0_e$. Ce module est mesuré sur les éprouvettes ISO527-2-1A en traction ; nous aurions cependant pu choisir une autre quantité physique dont l'ordre de grandeur est celui des composantes $C^e_{ijkl}$.

Au bilan, le vecteur résidu global est de taille 29, et toutes ses composantes sont adimensionnées.

### B.3.2 Termes supplémentaires dans la matrice jacobienne

On introduit les termes supplémentaires suivants (non nuls), cohérents avec le schéma d'intégration implicite :

$$\frac{\partial R_{\varepsilon_e}}{\partial \Delta \varepsilon_{hp}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{B.54}$$

$$\frac{\partial R_{\varepsilon_{hp}}}{\partial \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_{v1}} = -\frac{1}{E_e^0}[C] \tag{B.55}$$

$$\frac{\partial R_{\varepsilon_{hp}}}{\partial \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_{v2}} = -\frac{1}{E_e^0}[C] \tag{B.56}$$

$$\frac{\partial R_{\varepsilon_{hp}}}{\partial \Delta p} = -\frac{1}{E_e^0}[C] \cdot \underline{\underline{n}}_{vp} \tag{B.57}$$

$$\frac{\partial R_{\varepsilon_{hp}}}{\partial \Delta \varepsilon_{hp}} = \frac{1}{E_e^0}[B] \tag{B.58}$$

$$\frac{\partial R_{\varepsilon_{hp}}}{\partial \Delta \beta} = \frac{1}{E_e^0}[G] \cdot \left\{2\Delta \underline{\underline{\varepsilon}}^{el} + \underline{\underline{\varepsilon}}^{el}\right\} \tag{B.59}$$

$$\tag{B.60}$$

La matrice $[G]$ est la représentation en notations de Voigt du tenseur $\mathbb{G}^e$, réduit en ce qui concerne ses lignes aux composantes hors-plan, c'est-à-dire :

$$[G] = \begin{bmatrix} G^e_{3311} & G^e_{3322} & G^e_{3333} & 2G^e_{3312} & 2G^e_{3313} & 2G^e_{3323} \\ G^e_{1311} & G^e_{1322} & G^e_{1333} & 2G^e_{1312} & 2G^e_{1313} & 2G^e_{1323} \\ G^e_{2311} & C^e_{2322} & G^e_{2333} & 2G^e_{2312} & 2G^e_{2313} & 2G^e_{2323} \end{bmatrix} \tag{B.61}$$

### B.3.3 Matrice tangente cohérente dans le cas des éléments coques anisotropes

La matrice tangente cohérente s'écrit par définition :

$$[L^c] = \frac{\partial \Delta \left\{\underline{\underline{\sigma}}^{plan}\right\}}{\partial \Delta \left\{\varepsilon^{imp}\right\}} \tag{B.62}$$

où l'on considère les contraintes et les déformations dans le plan. Elle est de taille $3 \times 3$.

À la place de résoudre $\{R\} = 0$ dans la méthode de Newton, considérons un problème équivalent qui s'écrit[4] :

$$\{\tilde{R}\} \equiv \left\{ \begin{array}{c} \Delta\underline{\underline{\varepsilon}}_e - \left(\Delta\underline{\underline{\varepsilon}}^{hp} - \Delta\underline{\underline{\varepsilon}}_{v1} - \Delta\underline{\underline{\varepsilon}}_{v2} - \Delta p\, \underline{\underline{n}}_{vp}\right) \\ \Delta p - \Delta t \Phi \\ \vdots \\ [B]\cdot\Delta\varepsilon^{hp} - [C]\cdot\Delta\varepsilon^{in} + [D]\cdot\varepsilon^{el} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \Delta\underline{\underline{\varepsilon}}^{imp} \\ 0 \\ \vdots \\ -[A]\cdot\Delta\varepsilon^{imp} \end{array} \right\} \tag{B.63}$$

Les matrices jacobiennes associées à ces deux résidus sont identiques, puisque $\Delta\underline{\underline{\varepsilon}}^{imp}$ n'est pas une variable d'intégration, mais une donnée d'entrée. Supposons une variation infinitésimale de $\Delta\underline{\underline{\varepsilon}}^{imp}$ autour de la solution. On a par définition de la matrice jacobienne :

$$\underbrace{\left\{\tilde{R}\right\}\left(\{\Delta v\}^k + \{\delta\Delta v\}\right)}_{\left\{ \begin{array}{c} \Delta\underline{\underline{\varepsilon}}^{imp} + \delta\Delta\underline{\underline{\varepsilon}}^{imp} \\ 0 \\ \vdots \\ -[A]\cdot\left(\Delta\varepsilon^{imp} + \delta\Delta\varepsilon^{imp}\right) \end{array} \right\}} = \underbrace{\left\{\tilde{R}\right\}\left(\{\Delta v\}^k\right)}_{\left\{ \begin{array}{c} \Delta\underline{\underline{\varepsilon}}^{imp} \\ 0 \\ \vdots \\ -[A]\cdot\Delta\varepsilon^{imp} \end{array} \right\}} + [J]\cdot\{\delta\Delta v\} \tag{B.64}$$

L'inversion de cette relation permet alors d'écrire :

$$\{\delta\Delta v\} \equiv \left\{ \begin{array}{c} \delta\Delta\underline{\underline{\varepsilon}}_e \\ \delta\Delta p \\ \vdots \\ \delta\Delta\varepsilon^{hp} \end{array} \right\} = [J]^{-1}\cdot\left\{ \begin{array}{c} \delta\Delta\underline{\underline{\varepsilon}}^{imp} \\ 0 \\ \vdots \\ -[A]\cdot\delta\Delta\varepsilon^{imp} \end{array} \right\} \tag{B.65}$$

On note l'inverse de la matrice jacobienne (définie par blocs) sous la forme :

$$[J]^{-1} = \left[ \begin{array}{cccc} J^*_{e-e} & \cdots & J^*_{e-\beta} & J^*_{e-hp} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ J^*_{\beta-e} & \cdots & J^*_{\beta-\beta} & J^*_{\beta-hp} \\ J^*_{hp-e} & \cdots & J^*_{\beta-\beta} & J^*_{hp-hp} \end{array} \right] \tag{B.66}$$

ce qui permet d'écrire :

$$\delta\Delta\underline{\underline{\varepsilon}}_e = \left[J^*_{e-e}\right]\cdot\delta\Delta\underline{\underline{\varepsilon}}^{imp} - \left[J^*_{e-hp}\right]\cdot[A]\cdot\left\{\delta\Delta\varepsilon^{imp}\right\} \tag{B.67}$$

et

$$\delta\Delta\beta = \left\{J^*_{\beta-e}\right\}\cdot\delta\Delta\underline{\underline{\varepsilon}}^{imp} - \left\{J^*_{\beta-hp}\right\}\cdot[A]\cdot\left\{\delta\Delta\varepsilon^{imp}\right\} \tag{B.68}$$

De même que précédement, l'équation B.41 (toujours valable) nous amène à l'expression suivante de la matrice tangente cohérente :

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Delta\left\{\underline{\underline{\sigma}}^{plan}\right\}}{\partial\Delta\left\{\varepsilon^{imp}\right\}} &= \underbrace{\left(\mathbb{C}^e + \theta\Delta\mathbb{C}^e\right) : \left[J^*_{e-e}\right]}_{\text{taille } 6\times 6} - \underbrace{\left(\mathbb{C}^e + \theta\Delta\mathbb{C}^e\right) : \left[J^*_{e-hp}\right]\cdot[A]}_{\text{taille } 6\times 3} \\ &+ \underbrace{\left(2\theta\mathbb{G}^e : \underline{\underline{\varepsilon}}_e\right)\otimes\left\{J^*_{\beta-e}\right\}}_{\text{taille } 6\times 6} - \underbrace{\left(2\theta[G] : \underline{\underline{\varepsilon}}_e\right)\otimes\left([A]\cdot\left\{J^*_{\beta-hp}\right\}\right)}_{\text{taille } 3\times 6} \end{aligned} \tag{B.69}$$

4. Remarquons une subtile différence entre $\underline{\underline{\varepsilon}}^{imp}$ et $\left\{\varepsilon^{imp}\right\}$. Ce dernier est la représentation en notations de Voigt d'un tenseur d'ordre 2 ; de taille 6, il s'écrit $\{\Delta\varepsilon_{11}\ \Delta\varepsilon_{22}\ 0\ \Delta\varepsilon_{12}\ 0\ 0\}^t$ tandis que $\left\{\varepsilon^{imp}\right\}$ est simplement un vecteur de taille 3. Les deux comportent la même information, mais ne sont pas de la même taille.

où l'on ne conserve que les lignes – et le cas échéant les colonnes – n° 1, 2 et 4 (i.e. correspondant aux composantes planes) pour obtenir l'expression de $[L^c]$. En effet, de taille $3\times3$, la matrice $\dfrac{\partial\Delta\left\{\underline{\underline{\sigma}}^{plan}\right\}}{\partial\Delta\left\{\varepsilon^{imp}\right\}}$ n'a pas de représentation matricielle condensée rigoureuse.

## B.4 Décomposition énergétique

Il peut être intéressant de distinguer comment la densité d'énergie mécanique apportée au système se répartit en densité d'énergie stockée et dissipée. La densité d'énergie mécanique totale apportée pendant l'incrément $\Delta t$ s'exprime selon :

$$\Delta W_{\text{tot}} = \underline{\underline{\sigma}} : \Delta\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\sigma}} : \left(\Delta\underline{\underline{\varepsilon}}_e + \Delta\underline{\underline{\varepsilon}}_{v1} + \Delta\underline{\underline{\varepsilon}}_{v2} + \Delta\underline{\underline{\varepsilon}}_{vp}\right) \tag{B.70}$$

La discrétisation de l'équation définissant l'énergie libre volumique 3.8 permet d'écrire (en régime isotherme) :

$$\begin{aligned}\Delta W_{\text{stock}} &= \frac{d}{dt}\left(\rho_0 w_0\right)\Delta t \qquad\qquad (B.71)\\ &= \left(\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\mathcal{A}}}_{v1}\right) : \Delta\underline{\underline{\varepsilon}}_{v1} + \left(\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\mathcal{A}}}_{v2}\right) : \Delta\underline{\underline{\varepsilon}}_{v2} - \underline{\underline{X}} : \Delta\underline{\underline{\alpha}} + \underline{\underline{\sigma}} : \Delta\underline{\underline{\varepsilon}}_e + \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{\varepsilon}}_e : \mathbb{G}^e : \underline{\underline{\varepsilon}}_e\right)\Delta\beta\end{aligned}$$

Comme on l'a déjà remarqué, la dissipation intrinsèque pendant $\Delta t$ se met sous la forme :

$$\Delta W_{\text{diss}} = \underbrace{\underline{\underline{\mathcal{A}}}_{vp} : \Delta\underline{\underline{\varepsilon}}_{vp} + \underline{\underline{X}} : \Delta\underline{\underline{\alpha}}}_{\text{dissipation par viscoplasticité}} + \underbrace{\underline{\underline{\mathcal{A}}}_{v1} : \Delta\underline{\underline{\varepsilon}}_{v1} + \underline{\underline{\mathcal{A}}}_{v2} : \Delta\underline{\underline{\varepsilon}}_{v2}}_{\text{dissipation viscoélastique}} \underbrace{-\frac{1}{2}\left(\underline{\underline{\varepsilon}}_e : \mathbb{G}^e : \underline{\underline{\varepsilon}}_e\right)\Delta\beta}_{\text{dissipation par adoucissement}} \tag{B.72}$$

La décomposition de la déformation totale selon :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\varepsilon}}_e + \underline{\underline{\varepsilon}}_{v1} + \underline{\underline{\varepsilon}}_{v2} + \underline{\underline{\varepsilon}}_{vp} \tag{B.73}$$

permet de démontrer que l'on retrouve bien l'égalité attendue, à savoir :

$$\Delta W_{\text{tot}} = \Delta W_{\text{stock}} + \Delta W_{\text{diss}} \tag{B.74}$$

En régime stationnaire, les variables d'intégration $v_i$ possèdent des valeurs très proches au début et à la fin d'un cycle de chargement, ce qui permet de négliger la variation de $W_{\text{stock}}$ sur un cycle et donc d'écrire :

$$\Delta W_{\text{diss}} \sim \int_{\text{cycle}} \underline{\underline{\sigma}} : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}\,\mathrm{d}t \sim \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\underline{\underline{\sigma}}(t_{i-1}) + \underline{\underline{\sigma}}(t_i)}{2} : \Delta\underline{\underline{\varepsilon}}(t_i)\right) \tag{B.75}$$

où $n$ est le nombre d'incréments sur un cycle.

Nous n'avons pas développé les équations dans le cas anisotherme, où il faut compléter les expressions en tenant compte de la sensibilité des paramètres à la température.

# Annexe C

# Liste des publications scientifiques

### Articles pour des revues à comité de lecture

A. Launay, M.H. Maitournam, Y. Marco, I. Raoult, F. Szmytka. Cyclic behaviour of short glass fibre reinforced polyamide : Experimental study and constitutive equations. *International Journal of Plasticity* **27** : 1267–1293 (2011)

A. Launay, M.H. Maitournam, Y. Marco, I. Raoult. Multiaxial fatigue models for short fiber reinforced polyamide : constitutive behaviour and lifetime. *International Journal of Fatigue* (soumis pour publication, 2011)

A. Launay, Y. Marco, M.H. Maitournam, I. Raoult. Influence of temperature and relative humidity on the cyclic behaviour of a short glass fibre reinforced polyamide. *Mechanics of Materials* (soumis pour publication, 2011)

### Conférences internationales

**Fatigue 2010** (10$^{th}$ International Fatigue Congress, Prague, juin 2010, présentation orale)
A. Launay, Y. Marco, M.H. Maitournam, I. Raoult, F. Szmytka. Cyclic behavior of short glass fiber reinforced polyamide for fatigue life prediction of automotive components. *Procedia Engineering* **2** : 901–910 (2010)

**ICM11** (11$^{th}$ International Congress on the mechanical behavior of Materials, Côme, juin 2011, présentation orale)
A. Launay, Y. Marco, M.H. Maitournam, I. Raoult. Constitutive behavior of injection molded short glass fiber reinforced thermoplastics : a phenomenological approach. *Procedia Engineering* **10** : 2007–2010 (2011)

### Conférences nationales

**DEPOS23** (23$^{e}$ congrès sur la DÉformation des Polymères Solides, Guidel, septembre 2010, poster)

**AUSSOIS 2011 « Matériaux Composites »** (Colloque annuel du Groupe Français de Mécanique et Matériaux, Aussois, janvier 2011, poster)

**CSMA 2011** (10$^{e}$ Colloque National en Calcul des Structures, Giens, mai 2011, poster)
A. Launay, M.H. Maitournam, Y. Marco, I. Raoult. Influence du procédé d'injection dans la simulation mécanique de thermoplastiques chargés en fibres de verre courtes. http ://hal.archives-ouvertes.fr/CSMA2011/fr/

## Résumé

Les thermoplastiques renforcés en fibres de verre courtes (TPRFV) sont de plus en plus couramment employés dans l'industrie automobile, en raison de leurs propriétés mécaniques spécifiques intéressantes, de leur mise en forme aisée grâce au moulage par injection et de leur coût modéré. Cette thèse vise à développer une démarche de dimensionnement à la fatigue des composants automobiles en TPRFV, à partir d'un polyamide 66 chargé à 35 % en masse. La première étape est la proposition d'une loi de comportement cyclique, qui modélise les composantes non linéaires de la déformation (viscoélasticité, viscoplasticité, adoucissement) dans différents environnements hygrothermiques. Le modèle anisotrope s'appuie sur la distribution d'orientation des fibres, induite par le procédé d'injection, puis est validé sur structures. La connaissance des chargements mécaniques locaux et des mécanismes non linéaires permet de proposer un critère de fatigue fondé sur la densité d'énergie dissipée par cycle.


**Mots-clés** : fatigue, polyamide, fibres de verre, moulage par injection, comportement cyclique non linéaire, conditions hygrothermiques


## Abstract

Short glass fiber reinforced thermoplastics (SGFRTP) are a cost-efficient solution for the automotive industry, combining sufficient specific stiffness with a large freedom of shapes provided by injection molding. This thesis aims at developing an approach for fatigue design of structural components made of SGFRTP, based on the example of a polyamide 66 filled with 35% of short glass fibers. The first step of this work consists in the modelling of the nonlinear cyclic behaviour, describing deformation mechanisms such as viscoelasticity, viscoplasticity and cyclic softening, for various hygrothermal conditions. The anisotropic model takes into account the fiber orientation distribution which results from the molding process, and is validated on structures. A fatigue criterion formulated with the dissipated energy density per cycle is proposed. It relies on the knowledge of local mechanical loadings and non linear mechanisms.


**Keywords** : fatigue, polyamide, glass fibers, injection moulding, non-linear cyclic behaviour, hygrothermal conditions