



Flambement d'une sphère sous sollicitations combinées

Mamadou Tall, Said Hariri, Philippe Le Grogneq, Yves Simonet

► To cite this version:

Mamadou Tall, Said Hariri, Philippe Le Grogneq, Yves Simonet. Flambement d'une sphère sous sollicitations combinées. 13ème Congrès de mécanique, Société marocaine des sciences mécaniques (SMSM); Université Moulay Ismail (UMI), Apr 2017, Meknès, Maroc. hal-01710274

HAL Id: hal-01710274

<https://ensta-bretagne.hal.science/hal-01710274>

Submitted on 17 May 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Flambement d'une sphère sous sollicitations combinées

M. TALL^{*,1,2} S. HARIRI² P. LE GROGNEC³ Y. SIMONET¹

* mamadou.tall@cetim.fr

¹ CETIM – Centre Technique des Industries Mécaniques, Senlis

5, avenue Félix Louat – BP 80067

60304 Senlis, France

² Ecole des Mines Douai

Département Technologie des Polymères et Composites & Ingénierie
Mécaniques

941, rue Charles Bourseul - CS 10838

59508 Douai cedex, France

³ ENSTA Bretagne

FRE CNRS 3744, IRDL, F-29200 Brest, France

1 Introduction

Les structures minces sont caractérisées par le fait qu'une de leur dimension (e.g. l'épaisseur) soit très petite devant les dimensions globales de la structure ainsi que devant les rayons de courbures de la surface moyenne. Cette spécificité en font des structures extrêmement légères et donc économiquement très attractives. Parmi leurs nombreuses applications, on peut citer de façon non exhaustif les structures offshore, les véhicules, les composants de l'industrie aéronautique, les Équipements Sous Pression (ESP) ... Cette légèreté à laquelle s'ajoute leur élancement font que lorsqu'elles sont soumises à des contraintes de natures compressives et/ou de cisaillement, elles peuvent entrer dans un état instable à partir d'un certain niveau de chargement. Cet instabilité mécanique désignée sous l'appellation flambement a fait l'objet de plusieurs recherches depuis plus d'une centaine d'années.

Si nous prenons le cas particulier des ESP, les conséquences inhérentes à la défaillance de tels équipements sont nombreuses et variées (risques humains, matériels, écologiques). Pour se prémunir contre ces risques et assurer un dimensionnement sécuritaire, les industriels font appel à des codes et des normes (CODAP français, ASME ...). Dans ce papier, on présente la tenue au flambement de la structure sphérique sous sollicitations combinées (pression externe + cisaillement circonférentiel). La raison pour laquelle on s'intéresse à une telle configuration est que dans les ESP on note souvent la présence de zones de transition qui peuvent induire un cisaillement local. Or, les ingénieurs ne disposent pas actuellement de règles suffisamment claires pour justifier proprement les effets de ce cisaillement local sur la tenue au flambement d'une sphère sous pression externe. En adoptant le formalisme des Recommandations Européennes (texte ECCS) [1], les courbes de voilement (voir section 2) de ces deux différentes configurations sont établies et les différents paramètres clefs associés extraits.

2 Méthodes et Modélisation numérique

Nous adoptons le formalisme de courbes de voilement du texte ECCS. Ces courbes permettent de mettre en exergue la relation entre la résistance relative de flambement χ et l'élancement réduit λ (Équation 1). L'avantage de l'utilisation de ces courbes est qu'elles sont parfaitement déterminées par la connaissance de quatre grands paramètres clefs (Tableau 1) qui permettent de mettre en exergue, individuellement, une caractéristique essentielle durant le flambement.

$$\begin{cases} \chi = 1 & \text{quand } \lambda \leq \lambda_0 \\ \chi = 1 - \beta \left(\frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_p - \lambda_0} \right)^\eta & \text{quand } \lambda_0 < \lambda < \lambda_p \\ \chi = \frac{\alpha}{\lambda^2} & \text{quand } \lambda_p < \lambda \end{cases} \quad (1)$$

$$\lambda_p = \sqrt{\frac{\alpha}{1 - \beta}} \quad (2) \quad \lambda = \sqrt{\frac{R_{MNA}}{R_{LBA}}} \quad (3)$$

α	Non-linéarités géométriques et imperfections géométriques
β	Définition du domaine plastique
η	Interaction élastique-plastique
λ_0	Délimitation plateau plastique

TABLE 1 – Paramètres clefs des courbes de voilement [1][2]

Pour les différents calculs présentés ici (sphère sous pression externe et/ou cisaillement), sauf indication contraire, les caractéristiques géométriques et mécaniques utilisées sont données en Tableau 2. En pression externe, une sphère complète est modélisée afin de traiter le problème dans sa globalité et ainsi ne pas écarter certains modes de flambement. Par la suite, nous nous limitons à une demi-sphère en appliquant les conditions limites adéquates. Pour la sphère complète en pression externe, deux types de maillage sont utilisés : un maillage axisymétrique (Figure 1a) mettant en exergue un "point singulier" au niveau de l'apex et un maillage structuré en quadrangle (Figure 1b) plus uniforme. Toutes les analyses non-linéaires de flambement sont effectuées en utilisant la méthode de longueur d'arc de Riks [3] implémentée dans le logiciel commercial ABAQUS [4].

Le cisaillement est modélisé à l'aide d'une distribution circonférentielle de pression qui s'inspire des travaux de Yinyi [5]. La modélisation de cette distribution circonférentielle est possible grâce aux "subroutines" présentes dans ABAQUS [4]. Par ailleurs, afin de rendre efficient ces études paramétriques, certaines tâches fastidieuses (maillage, variation des différents

Matériau	P235	-
Module d'Young	E	210 GPa
Coefficient de Poisson	ν	0.3
Rayon	R	500 mm
Épaisseur	t	4 mm
Limite élastique	σ_y	235 MPa

TABLE 2 – Caractéristiques mécaniques et géométriques de la géométrie de référence

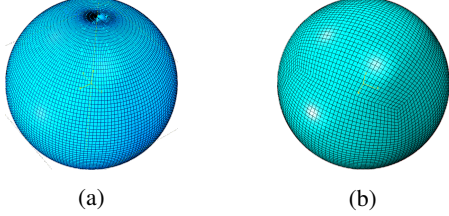


FIGURE 1 – (a) Maillage axisymétrique, (b) Maillage quadrangle structuré

paramètres, lancement des calculs, post-processing ...) sont automatisées en utilisant des routines aussi bien en Fortran[©] qu'en Python[©].

3 Résultats et Discussions

3.1 Sphère complète sous pression externe

Zoelly [6] établit le premier la pression critique (Équation 4) de flambement sous les hypothèses d'un comportement purement axisymétrique d'une sphère complète sous pression externe. Toutefois, à l'instar du cylindre sous compression axiale, une disparité systématique est observée entre les résultats théoriques et expérimentaux [7] [8] [9].

$$P_{crz} = \frac{2 \cdot E}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \left(\frac{t}{R} \right)^2 \quad (4)$$

Dans ce qui suit, on effectue les différentes analyses préconisées par le texte ECCS. Ainsi, les calculs paramétriques sur la sphère complète parfaite et imparfaite permettent d'aboutir à un certain nombre de résultats :

- (i) L'Analyse Linéaire de Bifurcation (LBA) permet de constater que la forme des modes de flambement est intrinsèquement liée au maillage adopté. Ainsi, pour le maillage axisymétrique avec "point singulier", les lobes de certains modes montrent une direction privilégiée (Figure 2a), notamment sous forme de cerceaux, alors que pour le second maillage, quadrangle structuré, les fossettes se forment sur toute la zone circonférentielle de la sphère et ce, de manière uniforme (Figure 2b). Pour chaque maillage, on constate aussi l'existence de modes multiples dans la mesure où les pressions critiques obtenues sont relativement proches voire identiques.

- (ii) En utilisant un logiciel "maison" issu des travaux de Le Grogne et Le Vanh [10] [11], le flambement en théorie des grandes transformations de la sphère parfaite a aussi été étudié. Ce logiciel permet à l'aide de méthodes de continuation particulières et de longueur d'arc généralisées de gérer automatiquement les points limites et les points de bifurcation via un calcul incrémental. Ainsi, en élasticité l'on peut constater qu'aussi bien pour la pression suiveuse que la pression morte, les valeurs critiques obtenues sont très voisines de celle théorique P_{crz} (erreur de l'ordre de 1%). En plasticité, tout juste après la bifurcation, il existe un point limite ainsi qu'un léger "snap-back" en post-flambement.

- (iii) L'Analyse Matériellement Non-linéaire (MNA) permettant d'estimer la résistance plastique de référence R_{MNA} montre que la formule adoptée actuellement dans le texte ECCS et les valeurs numériques du calcul paramétrique s'accordent parfaitement. L'Analyse Géométriquement Non-linéaire sur la structure imparfaite (GNIA) met en exergue le caractère sensible aux imperfections de la sphère sous pression externe. Par exemple, pour la géométrie de référence, une amplitude d'imperfection de $\delta_0 = 0.5 \cdot t$ conduit à une réduction de la pression critique de 58%. Tandis que pour la même géométrie, l'analyse Géométriquement et Matériellement Non-linéaire sur la structure imparfaite (GMNIA) en adoptant une loi de comportement parfaitement plastique permet de constater que cette réduction s'accroît si la structure plastifie avant le point limite. A titre d'illustration, la Figure 3 donne les courbes charge-déplacement de l'analyse GMNIA effectuée sur la géométrie de référence ($R/t = 125$).

Ces calculs paramétriques permettent d'aboutir aux différents paramètres clés des courbes de voilement, notamment via l'utilisation des courbes modifiées de Rotter [12][13]. Les points numériques obtenues (pour chaque valeur de R/t) sont interpolées de manière non-linéaires en utilisant la méthode des moindres carrés afin d'obtenir des expressions qui ne dépendent que de l'amplitude adimensionnelle de l'imperfection δ_0/t . La Figure 4 donne le facteur d'imperfection α pour différentes valeurs de R/t issu de ces analyses paramétriques pour la sphère complète, celui qui est actuellement codifiée dans le texte ECCS et le facteur α récemment obtenu par Błażejowski et Marcinowski [14] sur une calotte sphérique encastrée en ses bords. De même, de nouvelles expressions des facteurs β et η ne dépendant que de δ_0/t ont été établies sachant que ceux qui sont actuellement codifiés sont pris, de manière conservative, constants.

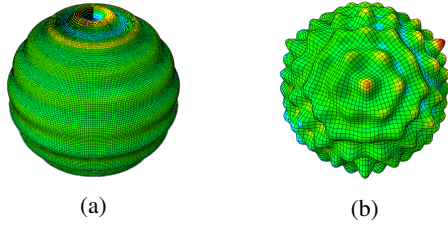


FIGURE 2 – (a) Mode 1 du maillage axisymétrique, (b) Mode 1 du maillage quadrangle structuré

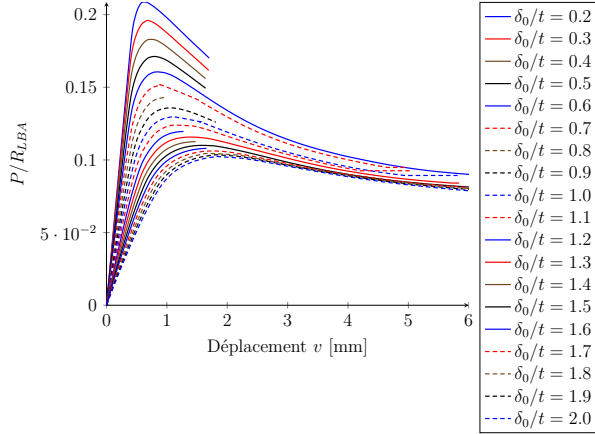


FIGURE 3 – Analyse paramétrique GMNIA de la sphère sous pression externe : $E = 210$ MPa, $\nu = 0.3$, $\sigma_y = 235$ MPa ($R/t = 125$)

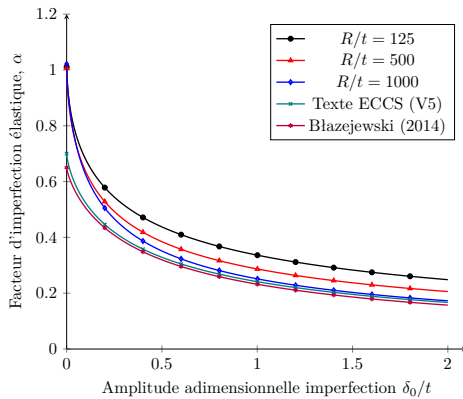


FIGURE 4 – Sphère complète sous pression externe : Facteur d'imperfection élastique α

3.2 Sphère sous cisaillement

L'analyse LBA sur la sphère sous cisaillement circonférentiel montre l'existence de modes de flambement de forme ellipsoïdale (Figure 5) comme l'ont d'ailleurs constaté Mow et Sadowski [15] dans leurs travaux précurseurs sur une sphère ayant un piquage aux différents pôles.

De plus, les analyses GNIA et GMNIA permettent de constater que pour la sphère sous cisaillement circonférentiel, la sensibilité aux imperfections géométriques n'est pas aussi prononcée qu'en pression externe. En effet, en flambement élastique, on constatera une certaine réserve en post-flambement alors qu'en plasticité pour de faibles amplitudes

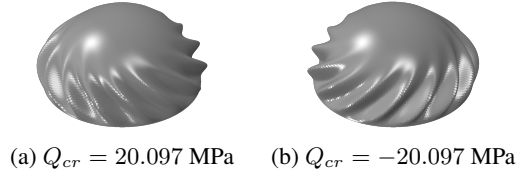


FIGURE 5 – Modes en cisaillement circonférentiel : (a) Mode 1, (b) Mode 2

d'imperfection, après le point critique l'on constate l'existence d'un plateau avant une brusque chute de la capacité portante de la coque. La Figure 6 donne le facteur α pour différents ratio R/t ainsi que la borne inférieure ("lower bound") qui en est déduite. Contrairement à la sphère complète sous pression externe, les paramètres α entre deux ratios donnés sont quasi-coïncidents. Les autres paramètres clefs (β , η) sont extraits et ne dépendent que de δ_0/t . Néanmoins, il serait opportun de disposer de résultats expérimentaux afin de juger qualitativement de la valeur de ces nouvelles courbes de voilement qui sont, à la connaissance de l'auteur, tout à fait nouvelles.

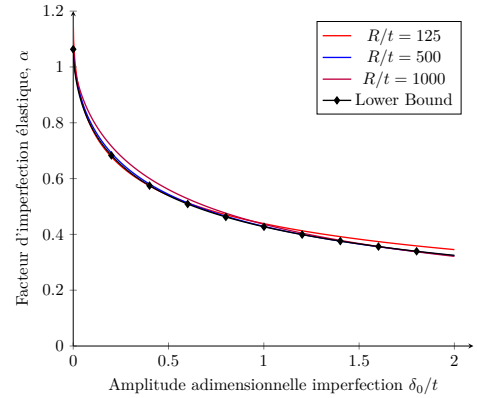


FIGURE 6 – Sphère sous cisaillement : Facteur d'imperfection élastique α

3.3 Combinaison de sollicitations

Les résultats précédents ont permis de mettre en exergue le comportement de la sphère sous sollicitations de pression externe d'une part et de cisaillement d'autre part. Néanmoins, en pratique les structures ne sont pas soumises à l'une ou l'autre sollicitation fondamentale mais bien à leur combinaison. Ainsi, de manière analogue à Winterstetter et Schmidt [16], la combinaison de sollicitations est étudiée en établissant des courbes d'interaction permettant de mettre en exergue l'influence de chaque chargement. Les courbes d'interaction obtenues pour la sphère parfaite et imparfaite sont respectivement données sur la Figure 7 et la Figure 8 pour un ratio de géométrie $R/t = 500$. Les analyses paramétriques sur la combinaison de sollicitations permettent d'aboutir aux conclusions suivantes :

- (i) Pour la sphère parfaite, les courbes d'interaction obtenues respectivement pour les analyses LBA et GNA se superposent parfaitement. Ce fait permet de conjecturer naturellement que les non-linéarités géométriques avant flambement n'ont pas d'influence particulière sur le flambement en sollicitations combinées. La forme néanmoins des courbes obtenues dépend du ratio R/t . Ainsi, pour des coques suffisamment mince (R/t grand), les courbes d'interaction sont parfaitement linéaires et pour des coques suffisamment épaisses (R/t petit), on distingue une partie parabolique pour un cisaillement très faible.
- (ii) Pour la sphère imparfaite, les courbes d'interaction dépendent aussi bien de l'amplitude de l'imperfection que du ratio R/t . On remarque ainsi que lorsque le flambement a lieu dans le domaine élastique, les courbes d'interaction sont parfaitement linéaires et se superposent aux courbes LBA/GNA, alors que pour un flambement ayant lieu dans le domaine plastique, celles-ci sont asymptotiquement semblables à la surface seuil de Von-Mises. De plus, l'on note que pour toutes les courbes obtenues, il subsiste un plateau montrant qu'il existe une contrainte de cisaillement seuil en dessous de laquelle, le cisaillement circonférentiel n'a aucune influence sur la combinaison de sollicitation.

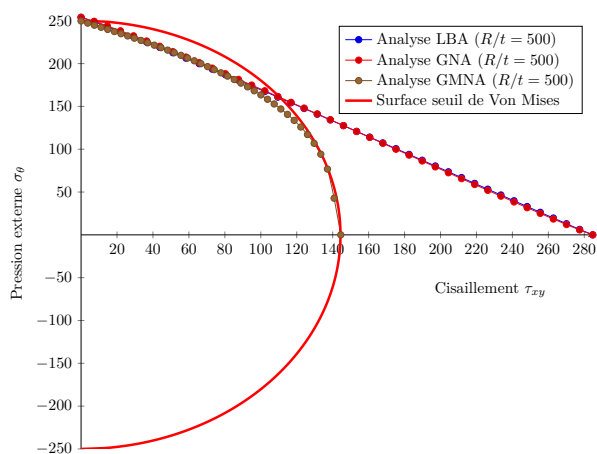


FIGURE 7 – Courbes d'interaction théoriques de la sphère parfaite (LBA, GNA, GMNA). Matériau : $E = 210$ GPa, $\sigma_y = 250$ MPa, $\nu = 0.3$. Géométrie : $R/t = 500$

4 Conclusions

Cette étude nous a permis d'explicitier le comportement au flambement de la sphère sous sollicitations combinées. Ainsi, les courbes de voilement de la sphère complète sous pression externe ont été obtenues et le facteur d'imperfection élastique α comparé aux résultats issus de la littérature. De même, de nouvelles courbes de voilement d'une sphère sous cisaillement circonférentiel ont été extraites. Enfin, des calculs

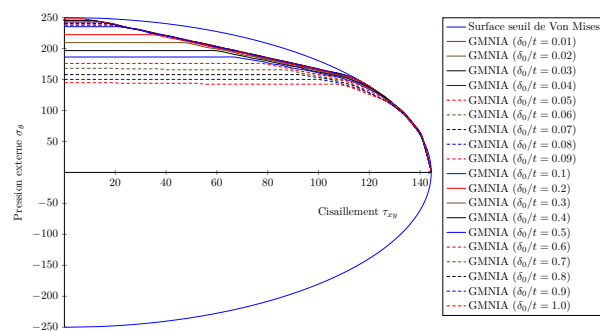


FIGURE 8 – Courbes d'interaction théoriques de la sphère imparfaite (GMNIA). Géométrie : $R/t = 500$. Matériau : $E = 210$ GPa, $\sigma_y = 250$ MPa, $\nu = 0.3$. Imperfection : Affine au premier mode de la sphère sous pression externe, amplitude δ_0 varie.

paramétriques en utilisant les différentes analyses du texte ECCS nous ont permis d'obtenir les courbes d'interaction d'une sphère sous sollicitations combinées de cisaillement et de pression externe. Ces nouvelles courbes permettront de proposer une règle d'interaction, à l'image de celle qui existe pour les cylindres, simple, accessible, permettant de dimensionner via un dépouillement analytique une sphère sous une telle configuration.

Références

- [1] J. M. ROTTER, H. SCHMIDT et EDITORS : Stability of steel shells : European design recommendations. fifth edition. Rapport technique, European Convention for Constructional SteelWorks, 2008.
- [2] CEN : En 1993-1-6 : Calculs des structures en acier : Partie 1-6 : Résistance et stabilité des structures en coques. Rapport technique, CEN, 2007.
- [3] E. RIKS : Some computational aspects of the stability analysis of nonlinear structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 47(3):219–259, 1984.
- [4] HIBBITT, KARLSSON et SORESENSEN : *ABAQUS/standard : User's Manual*, volume 1. Hibbitt, Karlsson & Sorensen, 2014.
- [5] Z. YINYI : Torsional buckling of spherical shells under circumferential shear loads. *Applied Mathematics and Mechanics*, 20(4):426–432, 1999.
- [6] R. ZOELLY : *Ueber ein Knickungsproblem an der Kugelschale*. Thèse de doctorat, Diss. Techn. Wiss. ETH Zürich, Nr. 146, 0000. Ref. : Meissner, E. ; Korref. : Kollros, L., 1915.
- [7] S. F. EGGWERTZ et L. SAMUELSON : Buckling strength of spherical shells. *Journal of Constructional Steel Research*, 17(3):195–216, 1990.
- [8] J. BLACHUT et G. D. GALLETLY : Buckling strength of imperfect steel hemispheres. *Thin-walled structures*, 23(1):1–20, 1995.
- [9] M. A. KRENZKE et T. J. KIERNAN : Tests of stiffened and unstiffened machined spherical shells under external hydrostatic pressure. Rapport technique, DTIC Document, 1963.
- [10] P. LE GROGNEC et A. LE VAN : Elastoplastic bifurcation and collapse of axially loaded cylindrical shells. *International Journal of Solids and Structures*, 45(1):64–86, 2008.
- [11] P. LE GROGNEC et A. LE VAN : Bifurcations primaires et secondaires d'un cylindre sous compression axiale. *Revue Européenne des Eléments*, 12(1):7–41, 2003.

- [12] C. DOERICH et J. M. ROTTER : Generalised capacity curves for stability and plasticity : Application and limitations. *Thin-Walled Structures*, 49(9):1132–1140, septembre 2011.
- [13] J. M. ROTTER : *The practical Design of shell structures exploiting different methods of analysis. In shells structures : Theory and Applications*. W. Pietraszkiewicz et C. Szymczak, Taylor and Francis, London, 2005.
- [14] P. BŁĄŻEJEWSKI et J. MARCINOWSKI : Buckling capacity curves for pressurized spherical shells. *In Metal Structures 2016 : Proceedings of the XIII International Conference on Metal Structures (ICMS2016, Zielona Góra, Poland, 15-17 June 2016)*, page 401. CRC Press, 2016.
- [15] C. C. MOW et M. A. SADOWSKI : Determination of the critical torque inducing buckling in a twisted spherical shell subject to internal or external pressure. Rapport technique, DTIC Document, 1962.
- [16] H. SCHMIDT et Th. A. WINTERSTETTER : Cylindrical shells under combined loading. *Buckling of thin metal shells*, page 261, 2004.