

Mesure de similarité de signaux par opérateur d'énergie croisée

Abdel-Ouahab Boudraa, Yves Préaux, Jean-Christophe Cexus, Iwao Fujino, Laurent Guillon

▶ **To cite this version:**

Abdel-Ouahab Boudraa, Yves Préaux, Jean-Christophe Cexus, Iwao Fujino, Laurent Guillon. Mesure de similarité de signaux par opérateur d'énergie croisée. 26° Colloque GRETSI, Sep 2017, Juan-les-Pins, France. hal-01670785

HAL Id: hal-01670785

https://ensta-bretagne.hal.science/hal-01670785

Submitted on 21 Dec 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Mesure de similarité de signaux par opérateur d'énergie croisée

Abdel-Ouahab BOUDRAA[1], Yves PRÉAUX[1], Jean-Christophe CEXUS[2], Iwao FUJINO[1,3] et Laurent GUILLON[1]

[1]IRENav (EA 3634), Ecole Navale/Arts-Métiers ParisTech, BCRM Brest, CC 600, 29240 Brest Cedex 9, France.

[2]Lab-STICC (UMR 6285), ENSTA Bretagne, 2 rue François Verny, 29806 Brest Cedex 9, France.

[3]Department of Communication and Network Engineering, Tokai University, Japan.

((boudra,yves.preaux)@ecole-navale,cexusje@ensta-bretagne.fr,fujino@tokai.ac.jp)

Résumé – Nous nous intéressons dans ce travail au problème de mesure de la similarité entre deux signaux. Nous présentons une mesure basée sur l'opérateur quadratique de Teager-Kaiser utilisé en traitement de la parole. Comparé à la fonction d'intercorrélation, cet opérateur exploite les signaux point à point et leurs dérivées premières et secondes pour mesurer le degré de leur interaction. Nous présentons une analyse théorique de cette mesure et nous l'illustrons sur des signaux synthétiques.

Abstract – This paper focuses on the similarity measure between two signals. A new measure based on the Teager-Kaiser energy operator, used in speech processing, is presented. Compared to intercorrelation function, this operator exploits the first and second derivatives of the signals to quantify the degree of their interaction. This measure considers both the signal samples (point to point comparison) and its derivatives (signal general shape and neighborhood of the samples). Theoretical analysis of this measure is presented and illustrated on synthetic signals.

1 Introduction

La notion de mesure de similarité intervient dans de nombreux domaines et applications tels que le traitement du signal, l'apprentissage statistique (Machine Learning), la fouille de données, les sciences cognitives ou la psychométrie [1]. La mesure de similarité, par exemple entre deux signaux, consiste à quantifier le degré de ressemblance entre ces deux séquences. Le degré de ressemblance, appelé également degré de similitude, est maximum quand les deux signaux à comparer sont identiques. Nous pouvons citer comme applications de la mesure de similarité le calcul de temps de retard en Radar et en Sonar, la détection d'un signal connu dans un bruit (filtrage adapté) ou la classification des séries temporelles. Un des enjeux, dans ces domaines, est comment choisir ou concevoir la mesure de similarité la plus adaptée aux données. Parmi les mesures utilisées nous pouvons citer la distance euclidienne, la fonction d'inter-corrélation ou la déformation temporelle dynamique (DTW pour Dynamic Time Warping) [1]-[6]. Ces mesures permettent de localiser les domaines de temps (espace,...) où, par exemple, deux signaux $x(t)$ et $y(t)$ se ressemblent. La mesure euclidienne est la plus utilisée, mais, malgré sa simplicité elle n'est pas robuste aux distorsions des données telles que l'effet d'échelle ou le décalage en temps [5]. Comparée à la distance euclidienne, la mesure DTW est plus robuste au décalage en temps mais reste couteuse en temps de calcul [6]. Comme la distance euclidienne, la fonction d'inter-corrélation compare les signaux $x(t)$ et $y(t)$ point par point mais elle est essentiellement efficace si le lien entre les signaux est linéaire. La plupart des mesures de similarité sont essentiellement basées sur les valeurs des échantillons des signaux. Ainsi les informations relatives à la forme du signal et au voisinage des échantillons ne sont pas prises en compte. En général, des informations relatives à la dynamique des signaux telles que leurs dérivées premières sont peu exploitées dans les mesures de similarité [5],[7]. Nous montrons dans ce travail comment de telles informations peuvent être exploitées en utilisant un opérateur quadratique d'énergie issu de l'opérateur de Teager-Kaiser [8] utilisé en traitement de la parole [9] et qui est basée sur les valeurs des échantillons du signal ainsi que ses dérivées première et seconde [10]-[11].

2 Opérateur d'énergie croisée : Ψ_{B}

L'opérateur d'énergie croisée Ψ_{B} est une extension de l'opérateur non-linéaire de Teager-Kaiser [8], aux signaux complexes [10]. Basé sur les crochets de Lie, cet opérateur quadratique est bien adapté pour mesurer l'interaction instantanée entre deux signaux complexes [11]. L'opérateur Ψ_{B} est également lié à l'intercorrélation, $R_{xy}(t,\tau)$ des signaux $x(t)$ et $y(t)$ [10] :

$$\Psi_{\mathsf{B}}(x(t),y(t)) = -\frac{\partial^2 R_{xy}(t,\tau)}{\partial\tau^2}\bigg|_{\tau=0} - \frac{\partial^2 R^*_{xy}(t,\tau)}{\partial\tau^2}\bigg|_{\tau=0} \quad (1)$$

Ψ_{B} est une forme bilinéaire symétrique et réelle,

$$\Psi_{\mathsf{B}}(x(t),y(t)) = 0.5[\Psi_{\mathbb{C}}(x(t),y(t)) + \Psi_{\mathbb{C}}(y(t),x(t))] \quad (2)$$

et $\Psi_{\mathbb{C}}(x(t),x(t)) = \Psi_{\mathsf{B}}(x(t),x(t))$ est sa forme quadratique :

$$\Psi_{\mathbb{C}}(x(t),y(t)) = 0.5[\dot{x^*}(t)\dot{y}(t) + \dot{x}(t)\dot{y^*}(t)] - 0.5[x(t)\ddot{y^*}(t) + x^*\ddot{y}(t)] \quad (3)$$

La relation (1) montre que Ψ_{B} mesure l'énergie croisée entre deux signaux et ainsi toute représentation temps-fréquence, telle que la fonction d'ambiguité ou la distribution de Wigner-Ville croisée, basée sur l'intercorrélation, est également liée à cet opérateur [12].

3 Similarité de signaux par Ψ_{B}

Nous allons montrer que l'opérateur $\Psi_{\mathsf{B}}(x(t),y(t))$ permet de mesurer le degré de similarité entre deux signaux $x(t)$ et $y(t)$. Plus précisément, nous nous limitons au cas de deux signaux dont le second est une version amplifiée avec un gain α et retardée d'un temps τ du premier. Pour la construction de la mesure de similarité nous utilisons le degré moyen d'interaction au cours du temps entre $x(t)$ et $y(t-\tau)$ introduit dans [13]

$$E_{\mathsf{B}}^{xy}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \Psi_{\mathsf{B}}(x(t), y(t-\tau))\, dt \quad (4)$$

Nous allons prouver que la valeur de $\Psi_{\mathsf{B}}(x(t), \alpha_0 y(t-\tau))$ indique à quel point nous nous approchons du cas où $x(t)$ et $\alpha y(t-\tau)$ sont proportionnels c'est à dire où

$$\exists \alpha \in \mathbb{R} / \forall t, x(t) = \alpha y(t-\tau) \quad (5)$$

Pour cela, nous choisissons de mesurer l'écart total ou l'erreur entre $x(t)$ et $\alpha_0 y(t-\tau)$ par la sortie de l'opérateur Ψ_{B} pour le signal erreur $z(t) = x(t) - \alpha_0 y(t-\tau)$ où le gain α_0 est choisi de façon à minimiser $\Psi_{\mathsf{B}}(z(t),z(t))$. Ce choix du critère du signal d'erreur est justifié par le fait que si la relation (5) est vérifiée, alors la valeur minimale de l'opérateur, noté $E_{z_{min}}$, vaut zéro. Elle est obtenue pour $\alpha = \alpha_0$

$$E_{z_{min}}(\tau) = \arg\min_{\alpha} \left[\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \Psi_{\mathsf{B}}(z(t),z(t))\, dt \right] \quad (6)$$

où T est la durée du signal.

Pour simplifier, nous supposons que $x(t)$ et $y(t)$ prennent leurs valeurs dans $\mathbb{R}$. Donc l'opérateur s'écrit :

$$\Psi_{\mathsf{B}}(x(t),y(t)) = \dot{x}(t)\dot{y}(t) - \frac{1}{2}[x(t)\ddot{y}(t) + \ddot{x}(t)y(t)] \quad (7)$$

Théorème
Soient $x(t)$ et $y(t)$ deux signaux de classe C^2 . $x(t)$ et $y(t)$ sont parfaitement similaires si

$$\xi_{B}^{xy}(\tau) = \frac{[E_{B}^{xy}(\tau)]^2}{E_{B}^{xx}(0) E_{B}^{yy}(0)} = 1$$

Preuve :

La sortie instantanée de l'opérateur pour $z(t)$ s'écrit :

$$\Psi_{\mathsf{B}}(z(t),z(t)) = \Psi_{\mathsf{B}}(x(t),x(t)) + {\alpha_0}^2 \Psi_{\mathsf{B}}(y(t-\tau),y(t-\tau)) - 2\alpha_0 \Psi_{\mathsf{B}}(x(t),y(t-\tau)) \quad (8)$$

En utilisant les relations (4) et (8) nous obtenons

$$E_{\mathsf{B}}^{zz}(\tau) = E_{\mathsf{B}}^{xx}(0) + {\alpha_0}^2 E_{\mathsf{B}}^{yy}(0) - 2\alpha_0 E_{\mathsf{B}}^{xy}(\tau) \quad (9)$$

Cherchons la valeur du gain α_0 qui minimise $E_{\mathsf{B}}^{zz}(\tau)$; ce qui revient à calculer la dérivée partielle suivante :

$$\left.\frac{\partial E_{\mathsf{B}}^{zz}(\tau)}{\partial \alpha_0}\right|_{\alpha_0=\alpha} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\left.(-2E_{\mathsf{B}}^{xy}(\tau) + 2\alpha_0 E_{\mathsf{B}}^{yy}(0))\right|_{\alpha_0=\alpha} = 0 \quad (10)$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{E_{\mathsf{B}}^{xy}(\tau)}{E_{\mathsf{B}}^{yy}(0)} \quad (11)$$

En utilisant les relations (9) et (11), la valeur optimale de la sortie de l'opérateur, $E_{z_{min}}(\tau)$, est donnée par

$$\begin{aligned} E_{z_{min}}(\tau) &= E_{\mathsf{B}}^{xx}(0)\left[1 - \frac{[E_{\mathsf{B}}^{xy}(\tau)]^2}{E_{\mathsf{B}}^{xx}(0)E_{\mathsf{B}}^{yy}(0)}\right] \\ &= E_{\mathsf{B}}^{xx}(0)[1 - \xi_{\mathsf{B}}^{xy}(\tau)] \end{aligned} \quad (12)$$

où

$$\xi_{\mathsf{B}}^{xy}(\tau) = \frac{[E_{\mathsf{B}}^{xy}(\tau)]^2}{E_{\mathsf{B}}^{xx}(0)E_{\mathsf{B}}^{yy}(0)} \quad (13)$$

Nous retrouvons un résultat analogue à celui de la corrélation croisée.

1. L'erreur $E_{z_{min}}(\tau)$ est nulle si $\xi_{\mathsf{B}}^{xy}(\tau) = 1$ et les signaux $x(t)$ et $\alpha y(t-\tau)$ sont rigoureusement proportionnels, c'est-à-dire totalement similaires. Ce résultat n'est valable que si les signaux sont non bruités. Dans le cas bruité $\xi_{\mathsf{B}}^{xy}(\tau)$ est maximale mais n'atteint pas la valeur 1.

2. Si la quantité $|\xi_{\mathsf{B}}^{xy}(\tau)|$ est minimale c'est-à-dire si $\xi_{\mathsf{B}}^{xy}(\tau)$ tend vers zéro alors la sortie de l'opérateur $E_{z_{min}}(\tau)$ est maximale et atteint la valeur $E_{\mathsf{B}}^{xy}(0)$. Donc, les signaux $x(t)$ et $\alpha y(t-\tau)$ sont totalement dissimilaires.

L'expression de $E_{z_{min}}(\tau)$ dépend du retard τ entre $x(t)$ et $y(t)$ mais ne permet pas de le calculer facilement. Une solution à ce problème est de maximer l'expression suivante [14] :

$$\tau = \arg\max_{\tau'} \left[E_{\mathsf{B}}^{xy}(\tau') \right] \quad (14)$$

4 Propriétés

Nous présentons ici deux propriétés de l'opérateur $\xi_{\mathsf{B}}^{xy}(\tau)$.

Propriété 1
Soit $\tau \in \mathbb{R}$. L'opérateur $\xi_{B}^{xy}(\tau)$ vérifie :

$$\xi_{B}^{xy}(\tau) = \xi_{B}^{yx}(-\tau)$$

Preuve :
Comme $\Psi_{\mathsf{B}}(x(t),y(t)) = \Psi_{\mathsf{B}}(y(t),x(t))$ et en utilisant la relation (4) il est facile de vérifier que

$$\begin{aligned} E_{\mathsf{B}}^{xy}(\tau) &= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\Psi_{\mathsf{B}}(x(t+\tau),y(t-\tau+\tau))\,dt \\ &= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\Psi_{\mathsf{B}}(y(t),x(t+\tau)\,dt \\ &= E_{\mathsf{B}}^{yx}(-\tau) \end{aligned} \quad (15)$$

Propriété 2
Soient $x(t)$ et $y(t)$ deux signaux réels, et $\tau \in \mathbb{R}$. Si $\Psi_{\mathcal{B}}(.,.) \geq 0$ alors

$$\xi_{\mathcal{B}}^{xy}(\tau) \leq 1$$

Preuve :
Soient a et $b \in \mathbb{R}$, et $s(t) = ax(t) + by(t-\tau)$. En utilisant la relation (7), nous obtenons

$$\begin{aligned} \Psi_{\mathsf{B}}(s(t),s(t)) = &(a\dot{x}(t) + b\dot{y}(t-\tau))^2 - (ax(t)+by(t-\tau))\times \\ &(a\ddot{x}(t) + b\ddot{y}(t-\tau)) \\ = &a^2\Psi_{\mathsf{B}}(x(t),x(t)) + b^2\Psi_{\mathsf{B}}(y(t-\tau),y(t-\tau)) \\ &+2ab\Psi_{\mathsf{B}}(x(t),y(t-\tau)) \end{aligned} \quad (16)$$

Comme par hypothèse $\Psi_{\mathsf{B}}(.,.) \geq 0$ alors

$$\begin{aligned} &\frac{a^2}{b^2}\Psi_{\mathsf{B}}(x(t),x(t)) + 2\Big(\frac{a}{b}\Big)\Psi_{\mathsf{B}}(x(t),y(t-\tau)) \\ &\qquad + \Psi_{\mathsf{B}}(y(t-\tau),y(t-\tau)) \geq 0 \end{aligned} \quad (17)$$

En utilisant (4), la relation (17) implique que

$$\Big(\frac{a}{b}\Big)^2 E_{\mathsf{B}}^{xx}(0) + 2\Big(\frac{a}{b}\Big)E_{\mathsf{B}}^{xy}(\tau) + E_{\mathsf{B}}^{yy}(0) \geq 0 \quad (18)$$

L'inégalité (18), est une inéquation du second ordre en $\frac{a}{b}$ toujours supérieure à zéro et donc le discriminant doit être négatif $\forall\tau$:

$$\Delta = 4(E_{\mathsf{B}}^{xy}(\tau))^2 - 4E_{\mathsf{B}}^{xx}(0)E_{\mathsf{B}}^{yy}(0) \leq 0 \quad (19)$$

$\Longrightarrow$

$$0 \leq (E_{\mathsf{B}}^{xy}(\tau))^2 \leq E_{\mathsf{B}}^{xx}(0)E_{\mathsf{B}}^{yy}(0) \quad (20)$$

(13) et $(20) \Longrightarrow \xi_{\mathsf{B}}^{xy}(\tau) \leq 1$. Soient c et d deux réels positifs. Comme $\sqrt{c\times d} \leq \frac{c+d}{2}$, il est facile de voir que les propriétés suivantes sont vérfiées.

$$\begin{aligned} E_{\mathsf{B}}^{xy}(\tau) &\leq \sqrt{E_{\mathsf{B}}^{xx}(0)E_{\mathsf{B}}^{yy}(0)} \\ E_{\mathsf{B}}^{xy}(\tau) &\leq \frac{1}{2}[E_{\mathsf{B}}^{xx}(0) + E_{\mathsf{B}}^{yy}(0)] \end{aligned} \quad (21)$$

Notons que pour une large classe de signaux, en particulier AM-FM, l'hypothèse $\Psi_{\mathsf{B}}(.,.) \geq 0$ est vérifiée [15],[16].

5 Simulations

Nous illustrons la mesure de similarité entre un signal non-stationnaire (chirp) $x(t)$ et sa version bruitée $y(t)$:

$$\begin{aligned} x(t) &= \sin[2\pi(\nu_0 t + 0.5\mu t^2)] \\ y(t) &= x(t) + b(t) \end{aligned} \quad (22)$$

où $\nu_0 = 2$, $\mu = 10$ et $b(t)$ est un bruit blanc Gaussien de moyenne nulle. Le nombre d'échantillons de chaque signal est fixé à $N = 1024$. La figure 1 présente le résultat de calcul de $\xi_{\mathsf{B}}^{xy}(\tau)$ et de la corrélation croisée $C(\tau)$ pour $x(t)$ et $y(t)$ avec un rapport signal à bruit (RSB) de 25dB. Les signaux sont très similaires et comme attendu, les deux mesures de similarité sont très proches de 1. La figure 2 illustre le cas où les signaux $x(t)$ et $y(t)$ sont très dissimilaires obtenu avec un RSB=-7dB. Le maximum de similarité donné par $\xi_{\mathsf{B}}^{xy}(\tau)$ est de l'ordre de 0.07, indiquant une très faible similarité entre $x(t)$ et $y(t)$, alors que celui atteint par la fonction $C(\tau)$ est au moins quatre plus celui de $\xi_{\mathsf{B}}^{xy}(\tau)$ (environ 0.35) accompagné de plusieurs ondulations ou lobes secondaires. Ces résultats montrent que la similarité est sur-estimée par la mesure $C(\tau)$ dans le cas d'une forte dissimilarité, contrairement à $\xi_{\mathsf{B}}^{xy}(\tau)$ car $C(\tau)$ est calculée en utilisant uniquement les valeurs échantillons du signal. Nous présentons sur la figure 3 le résultat de la mesure

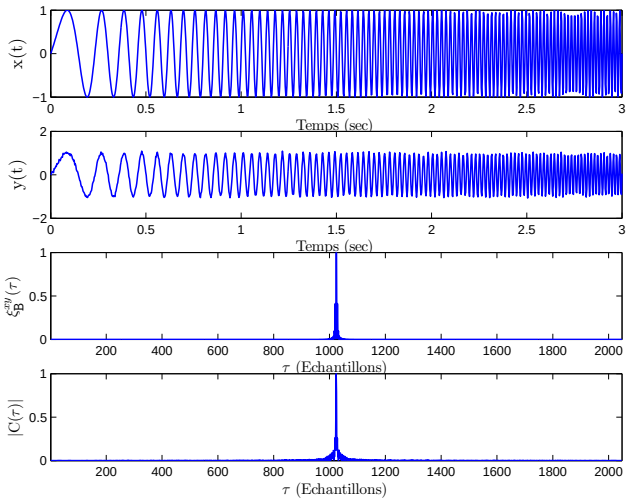


FIGURE 1 – Calcul de $\xi_{\mathsf{B}}^{xy}(\tau)$. Le signal $x(t)$ n'est pas bruitée et $y(t)$ sa version bruitée avec un RSB de 25dB.

de similarité dans le cas non-linéaire où $y(t) = x^2(t)$. La sortie de l'opérateur $\xi_{\mathsf{B}}^{xy}(\tau)$ indique qu'en $\tau = N$, là où les signaux sont supersposables, qu'il y a une similarité entre $x(t)$ et $y(t)$, même si elle de très faible. Alors que la sortie de la CC est inexpoitable en terme de lien ou de similarité entre $x(t)$ et $y(t)$, résultat attendu car cette mesure de similarité est linéaire.

L'ensemble de ces résultats préliminaires montrent la plus value d'intégrer la forme des signaux et leur dynamique via les dérivées premières et secondes (ou peut être même les dérivées d'ordre supérieur) dans les measures de similarit.

6 Conclusions

Dans cet article nous nous sommes intéressés au problème de mesure de signaux à valeurs réelles. Une mesure basée sur

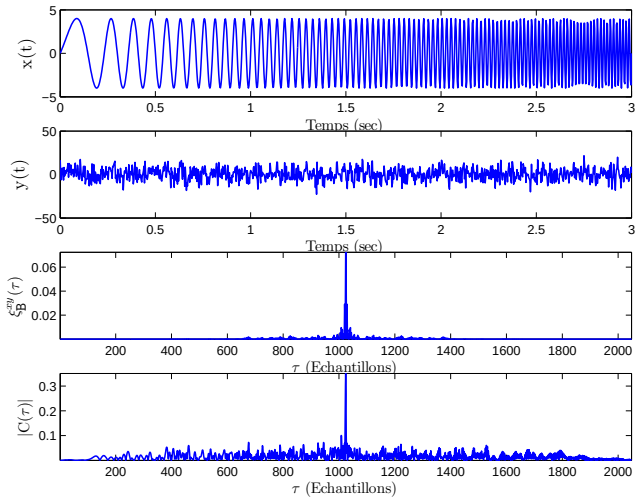


FIGURE 2 – Calcul de $\xi_{\mathsf{B}}^{xy}(\tau)$. Le signal $x(t)$ n'est pas bruité et $y(t)$ sa version très bruitée avec un RSB de -7dB.

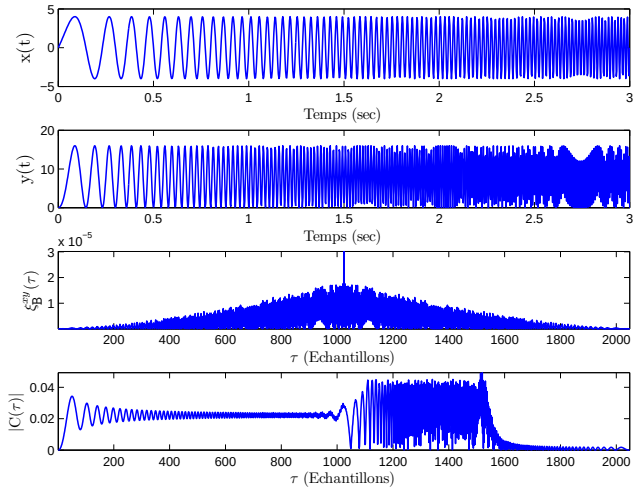


FIGURE 3 – Calcul de $\xi_{\mathsf{B}}^{xy}(\tau)$ dans le cas non-linéaire : $y(t) = x^2(t)$.

l'opérateur de Teager-Kaiser a été proposée. Une analyse théorique a été présentée et un coefficient mesurant le degré de similarité, $\xi_{\mathsf{B}}^{xy}(\tau)$, identifié. Les résultats obtenus ont été vérifiés sur des données synthétiques bruitées. Aussi, ces résultats montrent l'intérêt d'intégrer les dérivées premières et secondes des signaux pour une bonne mesure de a similarité entre deux signaux. Des tests sur des signaux réels sont nécessaires pour montrer l'apport de cette mesure, par exemple, pour la classification des séries temporelles ou pour la mesure des temps retards.

Références

[1] H. Ding, G. Trajcevski, P. Scheuermann, X. Wang and E. Keogh, "Querying and mining of time series data : experimental comparison of representations and distance measures," *Proc. 34th VLDB*, pp. 1542-1552, 2008.

[2] T.K. Moon, "Similarity methods in signal processing", *IEEE Trans. Sig. Proc.*, vol. 44, no. 4, pp. 827-833, 1996.

[3] J.Y. Stein, *Correlation*, in Digital Signal Processing : A Computer Science Perspective, John Wiley & Sons, Inc., 2000.

[4] R. Agrawal, C. Faloutos and A. Swami, "Efficient similarity search in sequence Database," *Proc. 4^{th} Int. Conf. Foundations of Data Organizations and Algorithms*, pp. 69-84, 1993.

[5] T. Gorecki, "Using derivatives in a longest common subsequence dissimilarity measure for tile series classification," *Patt. Recogn. Lett.*, vol. 45, pp. 99-105, 2014.

[6] D.J. Berndt and J. Clifford, "Using dynamic time warping to find patterns in time series," *Proc. knowledge discovery in databases*, pp. 359-370, 1994.

[7] E. Keogh and M. Pazzani, "Dynamic time warping with higher order features" *First SIAM Int. Conf. Data Mining*, pp. 1-11, 2001.

[8] J.F. Kaiser, "Some useful properties of Teager's energy operators" *Proc. ICASSP*, vol. 3, pp. 149-152, 1993.

[9] P. Maragos, J.F. Kaiser and T. Quatieri, "Energy separation in signal modulations with application to speech analysis", *IEEE Trans. Sig. Proc.*, vol. 41, pp. 3025-3051, 1993.

[10] J.C. Cexus and A.O. Boudraa, "On the link between cross-Wigner distribution and cross-Teager energy operator," *IEE Electronics Letters*, vol. 40, no. 12, pp. 778-780, 2004.

[11] A.O. Boudraa, S. Benramdane, J.C. Cexus and Th. Chonavel, "Some useful properties of cross-Ψ_{B}-energy operator," *Int. J. Electron. Comm.*, vol. 63, issue 9, pp. 728-735, 2009.

[12] A.O. Boudraa, "Relationships between Ψ_{B}-energy operator and some time-frequency representations," *IEEE Sig. Proc. Lett.*, vol. 17, no. 6, pp. 527-530, 2010.

[13] A.O. Boudraa, Th. Chonavel and J.C. Cexus, "Ψ_B-energy operator and cross-power spectral density," *Signal Processing*, vol. 94, pp. 236-240, 2014.

[14] A.O. Boudraa, J.C. Cexus and K. Abed-Meraim, "Cross-Ψ_{B}-energy operator-based signal detection," *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 132, pp. 4283-4289, 2008.

[15] A.C. Bovik and P. Margos, "Conditions for positivity of an energy operator," *IEEE Trans. Sig. Proc.*, vol. 42, no. 2, pp. 469-471, 1994.

[16] Y. Préaux et A.O. Boudraa, "Sur la positivité de l'opérateur d'énergie de Teager Kaiser," *GRETSI*, 2017 (Soumis).