Optimisation globale basée sur les contracteurs : Application au contrôle aérien

Jordan Ninin

Optimisation globale basée sur les contracteurs : Application au contrôle aérien

Jordan Ninin[1]

Lab-STICC (UMR 6285), ENSTA-Bretagne
2 Rue François Verny, 29200 Brest, France
jordan.ninin@ensta-bretagne.fr

Mots-clés : *optimisation globale, contractor programming, arithmétique d'intervalles, contrôle aérien.*

1 Modélisation du problème

L'automatisation et l'aide à la décision en contrôle aérien sont des enjeux majeurs pour les années à venir. L'augmentation du trafic étant inéluctable, les problèmes d'optimisation et de satisfaction de contraintes qui en découlent sont étudiés depuis plusieurs années par la communauté scientifique. Néanmoins, la difficulté de ces problèmes est encore présente, notamment par le caractère temporel de certaines contraintes. En effet, pour qu'une trajectoire soit valide, il faut pouvoir certifier que tout au long du vol la distance entre deux avions est toujours supérieure à 5 nautique. Dans cet article, nous présenterons une approche basée sur la programmation par *contracteurs* pour résoudre le problème d'élimination des conflits aériens par variation de la vitesse des avions.

Notre approche s'inspire de la modélisation développée par Cafieri et Durand dans [2]. Pour simplifier la modélisation, nous allons supposer que chaque avion a le droit de changer sa vitesse uniquement pendant un intervalle de temps continu. La trajectoire de chaque avion est rectiligne et une fois le conflit aérien évité, chaque avion reprend à sa vitesse initiale. Pour faciliter la représentation graphique, nous nous limiterons au cas planaire, mais l'étude suivante peut très bien être étendue au cas à trois dimensions.

Pour un avion i, notons $x_i(t)$ sa trajectoire pour tout $t \in [0, t_{end}]$, $p_i \in \mathbb{R}^2$ la position initiale de l'avion à $t = 0$, $v_i \in \mathbb{R}^2$ la vitesse initiale de l'avion, t_i^m le temps auquel l'avion modifie sa vitesse (que l'on suppose instantanée), q_i la variation de vitesse et δ_i la durée du changement de vitesse. L'équation de la trajectoire d'un avion s'écrit :

$$\forall t \in [0, t_{end}], x_i(t) = \begin{cases} p_i + v_i t, \forall t \in [0, t_i^m] \\ p_i + v_i t_i + q_i v_i (t - t_i^m), \forall t \in [t_i^m, t_i^m + \delta_i], \\ p_i + v_i t_i + q_i v_i \delta_i + v_i (t - t_i^m - \delta_i), \forall t \in [t_i^m + \delta_i, t_{end}]. \end{cases}$$

La contrainte imposée pour éviter les conflits entre deux avions i et j devient donc :

$$\forall t \in [0, t_{end}], ||x_i(t) - x_j(t)||_2 > 5.$$

Ainsi, en considérant N avions, le contrôleur aérien doit déterminer les variables $q = (q_1, \ldots, q_N)$, $t^m = (t_1^m, \ldots, t_N^m)$ et $\delta = (\delta_1, \ldots, \delta_N)$ appartenant à l'espace $\mathbb{K}_{in}$ suivant :

$$\mathbb{K}_{in} = \left\{ (q, t^m, \delta) \mid \forall t \in [0, t_{end}], \forall (i,j) \in \{1, \ldots, N\}^2,\ ||x_i(t) - x_j(t)||_2 > 5 \right\}.$$

Une situation de conflit se produira si la solution appartient au complémentaire, noté $\mathbb{K}_{out}$:

$$\mathbb{K}_{out} = \left\{ (q, t^m, \delta) \mid \exists t \in [0, t_{end}], \exists (i,j) \in \{1, \ldots, N\}^2,\ ||x_i(t) - x_j(t)||_2 \geq 5 \right\}.$$

Dans un souci de confort des passagers et de minimisation des coûts de carburant, nous nous efforcerons de trouver une solution minimisant la fonction suivante : $f(q, t^m, \delta) = \sum_{k=1}^{N} q_k \delta_k$.

2 Approche basée sur les contracteurs

L'approche, que nous allons utiliser, nécessite avant tout de construire un contracteur pour l'ensemble $\mathbb{K}_{in}$ et un contracteur pour $\mathbb{K}_{out}$. Soit $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ un ensemble. D'après [3], L'opérateur $\mathcal{C}_{\mathbb{X}} : \mathbb{IR}^n \to \mathbb{IR}^n$ est un *contracteur* pour $\mathbb{X}$ si :

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{IR}^n, \begin{cases} \mathcal{C}_{\mathbb{X}}(\mathbf{x}) \subseteq \mathbf{x}, & \text{(contraction)} \\ \mathcal{C}_{\mathbb{X}}(\mathbf{x}) \cap \mathbb{X} \supseteq \mathbf{x} \cap \mathbb{X}. & \text{(completeness)} \end{cases}$$

La notion de contracteur est très générale et permet d'inclure la plupart des algorithmes basés sur l'arithmétique d'intervalles. Définissons quelques opérateurs sur les contracteurs. Soit $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y} \subseteq \mathbb{R}^n$ deux ensembles et $\mathbf{x} \in \mathbb{IR}^n$ un intervalle de $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{array}{rl} \text{Intersection :} & (\mathcal{C}_{\mathbb{X}\cap\mathbb{Y}})(\mathbf{x}) = \mathcal{C}_{\mathbb{X}}(\mathbf{x}) \cap \mathcal{C}_{\mathbb{Y}}([\mathbf{x}]), \\ \text{Union :} & (\mathcal{C}_{\mathbb{X}\cup\mathbb{Y}})(\mathbf{x}) = \mathcal{C}_{\mathbb{X}}(\mathbf{x}) \cup \mathcal{C}_{\mathbb{Y}}([\mathbf{x}]), \\ \text{Proj-Inter :} & (\mathcal{C}_{\mathbb{X}\times\mathbb{Y}})^{\cap\mathbb{Y}} = \mathcal{C}_{\{x \mid \forall y \in \mathbb{Y},\, (x,y) \in \mathbb{X}\times\mathbb{Y}\}}, \\ \text{Proj-Union :} & (\mathcal{C}_{\mathbb{X}\times\mathbb{Y}})^{\cup\mathbb{Y}} = \mathcal{C}_{\{x \mid \exists y \in \mathbb{Y},\, (x,y) \in \mathbb{X}\times\mathbb{Y}\}}. \end{array} \tag{1}$$

L'approche basée sur les contracteurs repose sur l'arithmétique d'intervalles. Il est donc nécessaire de construire l'*extension naturelle* de la fonction $x_i(t)$ aux intervalles. Pour cela, nous utilisons la fonction χ introduite par Kearfott dans [4] qui permet de calculer l'extension naturelle d'une fonction non-lisse comportant une conditionnelle. L'extension naturelle de $x_i(t)$ devient donc :

$$\mathbf{x}_i(t) = \chi\left(t_i^m - t, p_i + v_i t, \chi\left(t_i^m + \delta_i - t, p_i + v_i t_i + q_i v_i (t - t_i^m), p_i + v_i t_i + q_i v_i \delta_i + v_i (t - t_i^m - \delta_i)\right)\right)$$

Grâce à l'expression analytique $\mathbf{x}_i(t)$, il est possible de créer un contracteur $\mathcal{C}_{\mathbb{X}_{ij}}$ pour l'ensemble $\mathbb{X}_{ij} = \{(q, t^m, \delta, t) \mid ||x_i(t) - x_j(t)||_2 \geq 5\}$, ainsi qu'un contracteur $\mathcal{C}_{\overline{\mathbb{X}_{ij}}}$ pour $\overline{\mathbb{X}_{ij}} = \{(q, t^m, \delta, t) \mid ||x_i(t) - x_j(t)||_2 < 5\}$. Ces contracteurs sont basés sur l'algorithme de Forward-Backward (aussi appelé HC4) [1]. Ainsi, en utilisant les définitions (et les algorithmes associés) des équations (1), on peut créer un contracteur pour $\mathbb{K}_{in}$ et $\mathbb{K}_{out}$:

$$\mathcal{C}_{\mathbb{K}_{in}} = \left(\bigcap_{i \neq j} \mathcal{C}_{\mathbb{X}_{ij}}\right)^{\cap[0,t_{end}]} \quad , \quad \mathcal{C}_{\mathbb{K}_{out}} = \left(\bigcup_{i \neq j} \mathcal{C}_{\overline{\mathbb{X}_{ij}}}\right)^{\cup[0,t_{end}]} .$$

Les contracteurs seront générés grâce à la librairie *IBEX* (*http ://www.ibex-lib.org*). Cette librairie contient des algorithmes implémentant les contracteurs de base définis par les équations (1). Le problème de minimisation du critère sera résolu en utilisant l'algorithme *OptiCtc* combinant un algorithme de SIVIA et un algorithme de Branch&Bound. Des résultats numériques seront exposés lors de la présentation.

Références

[1] F. Benhamou, F. Goualard, L. Granvilliers et J.-F. Puget, Revising Hull and Box Consistency. in *the 16th International Conference on Logic Programming*, p. 230–244, 1999.

[2] S. Cafieri et N. Durand, Aircraft deconfliction with speed regulation : new models from mixed-integer optimization. *Journal of Global Optimization*, 58(4), p. 613–629, 2014.

[3] G. Chabert et L. Jaulin, Contractor programming. *Artificial Intelligence*, 173(11), p. 1079–1100, 2009.

[4] R. B. Kearfott, Interval extensions of non-smooth functions for global optimization and nonlinear systems solvers. *Computing*, 57(2), p. 149–162, 1996.